Решения и критерии оценивания заданий регионального этапа 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике

9 класс

9.1. (О. Подлипский) У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, …, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?

Ответ. Не может.

Решение. Предположим противное, и пусть $n>1$ – наибольшая из длин выбранных прямоугольников. Тогда составлен клетчатый квадрат $k\times k$, где $k\ge n>1$. Значит, его площадь не менее n^2. С другой стороны, его площадь не больше, чем суммарная площадь всех прямоугольников 1×1, 1×2, 1×3, …, $1\times n$, т.е. не больше $1+2+3+\ldots+n<n^2$. Противоречие.

Замечание. Расположив в квадрате $n\times n$ прямоугольники 1×1, 1×2, 1×3, …, $1\times n$ «лесенкой» можно увидеть без вычислений, что их суммарная площадь меньше площади всего квадрата.

Комментарий. Только ответ «не может» – 0 баллов.

Только идея рассмотреть самый длинный из использованных прямоугольников (длины n) – 1 балл.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и замечено, что площадь, покрытая остальными использованными прямоугольниками, должна быть не меньше, чем $n(n-1)$ (или эквивалентное утверждение, например, что площадь всего квадрата должна быть не меньше, чем n^2), без дальнейшего содержательного продвижения – 3 балла.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и замечено, что суммарная площадь всех использованных прямоугольников не превосходит $n(n+1)/2$, без дальнейшего содержательного продвижения – 3 балла.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и явно сказано, что суммарная площадь всех использованных прямоугольников меньше n^2 – не менее 6 баллов.

Баллы, перечисленные выше, не суммируются друг с другом.

Если во в целом верном решении рассмотрен лишь случай квадрата со стороной n (а не больше) – снимается 1 балл.

9.2. (Н. Агаханов) На координатной плоскости нарисована парабола $y=x^2$. Для данного числа $k>0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k. Докажите, что диагонали всех таких трапеций проходят через одну точку.

Решение. Пусть $ABCD$ – одна из рассматриваемых трапеций, $AD\parallel BC\parallel Ox$ (рис. 1). Пусть точки A и C имеют координаты (a,a^2) и (c,c^2). Легко получить уравнение прямой AC: $(c^2-a^2)x-(c-a)y+(ca^2-ac^2)=0$, что после сокращения на $c-a\ne0$ превращается в $y=(a+c)x-ac$. Но $-ac$ равно произведению половин оснований трапеции (это произведение расстояний от A и C до оси Oy). Отсюда $-ac=\dfrac{k}{4}$. Следовательно, прямая

AC проходит через фиксированную точку $\left(0, \frac{k}{4}\right)$.

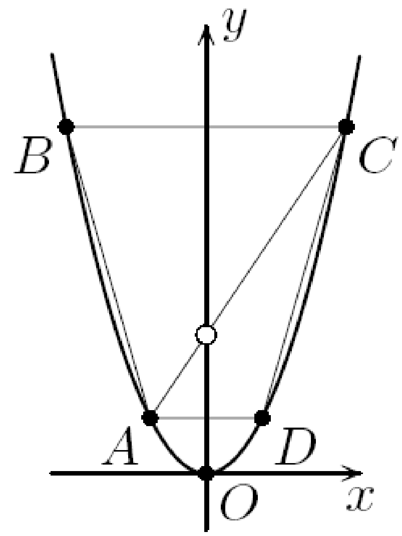

Рис. 1

Замечание. Конечно, утверждение задачи верно для любой параболы (а не только для $y = x^2$).

Комментарий. Верно указана общая точка диагоналей, но не доказано, что через нее они в самом деле проходят – 2 балла.

Задача решена при рассмотрении только одного из двух аналогичных случаев расположения точек (скажем, $a > 0$ разобран, а $a < 0$ – нет) – баллы не снимаются.

Ошибка в арифметике, не повлиявшая на ход решения – снимаются 2 балла.

9.3. (М. Дидин) На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Для игры в настольный теннис навылет всех жителей острова разделили на две команды A и B, причём в A жителей было больше, чем в B. Начали игру два игрока разных команд; после каждой партии проигравший игрок навсегда выходил из игры, и его заменял другой (ещё не игравший) член его команды. Проиграла команда, все члены которой вышли из игры. После турнира каждого члена команды A спросили: «Правда ли, что в какой-то игре ты проиграл лжецу?», а каждого члена команды B спросили: «Правда ли, что ты выиграл хотя бы у двух рыцарей?». Все ответы оказались утвердительными. Какая команда победила – A или B?

Ответ. Победила A.

Решение. Пусть в B есть хотя бы один рыцарь r. Тогда r выиграл хотя бы у двоих рыцарей из A, пусть s – один из них. Поскольку s – рыцарь, он правдиво ответил на заданный ему вопрос, то есть он проиграл лжецу. Но из правил следует, что каждый игрок проигрывает не более одного раза, а s проиграл и рыцарю r, и лжецу. Это противоречие показывает, что B состоит лишь из лжецов.

Предположим, что A состоит только из рыцарей. В этом случае каждый из них проиграл какому-то лжецу из команды B, однако каждый лжец в B выиграл не более, чем у одного рыцаря из A, так как он солгал, отвечая на вопрос. Следовательно, разным рыцарям из A соответствуют разные лжецы из B, поэтому в B людей не меньше, чем в A; противоречие.

Таким образом, в команде A есть хотя бы один лжец; обозначим одного из них через

ℓ. Тогда ℓ солгал, то есть он не проиграл ни одному лжецу из B – а значит, ни одному игроку из B. Это значит, что ℓ либо выиграл все свои партии, либо до него не дошла очередь. В любом из этих случаев команда A выиграла.

Комментарий. Верное доказательство того, что B состоит из лжецов – 2 балла.

Верное доказательство того, что в A есть хотя бы один лжец – 2 балла.

Указанные баллы суммируются.

9.4. (С. Берлов) В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500.

Решение. Сумма всех чисел ряда, кроме числа 500, равна $(1+2+3+\ldots+1000)-500>2\cdot 100000$, поэтому сумма чисел с какой-то из сторон от числа 500 больше 100000, пусть для определённости справа.

Пусть справа от 500 стоят (слева направо) числа $a_1,a_2,\ldots,a_k$. Обозначим $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$; выберем наименьшее n, для которого $S_n>100000$, так что $S_n>100000\ge S_{n-1}$. Если $S_n\le 100500$, то мы уже нашли желаемую группу чисел.

Пусть теперь $S_n>100500$. Докажем, что тогда нам подходит сумма $500+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}=500+S_{n-1}$. Действительно, поскольку $a_n\le 1000$, имеем $500+S_{n-1}=500+S_n-a_n>500+100500-1000=100000$. С другой стороны, $500+S_{n-1}\le 500+100000=100500$, что и требовалось.

Комментарий. Алгоритм выбора нужного отрезка чисел, который не работает хотя бы для одной перестановки чисел от 1 до 1000, признается не работающим и оценивается в 0 баллов.

В случае верного алгоритма выбора нужного отрезка оценка может быть снижена на 1, 2 или 3 балла, за пробелы в обосновании того, что алгоритм действительно работающий.

9.5. (А. Кузнецов) Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$). На продолжениях боковых сторон AB и BC за точку B отмечены точки D и E соответственно, а на основании AC отмечена точка F, причем $AC=DE$ и $\angle CFE=\angle DEF$. Докажите, что $\angle ABC=2\angle DFE$.

Первое решение. Обозначим через O середину дуги DBE окружности, описанной около треугольника DBE. Прямая BO является внешней биссектрисой в треугольнике DBE, а следовательно, и в треугольнике ABC. Но треугольник ABC равнобедренный, поэтому $BO\parallel AC$.

Заметим далее, что $\angle EOD=\angle EBD=\angle ABC$ (рис. 2). Таким образом, в равнобедренных треугольниках EOD и ABC равны углы при вершинах, а также основания, поэтому равны и сами треугольники. Отсюда, во-первых, $BA=BC=OE=OD$. Во-вторых, расстояние от точки O до прямой DE равно расстоянию от точки B до AC, а последнее равно расстоянию от O до AC (поскольку $BO\parallel AC$). Значит, точка O лежит на биссектрисе угла между прямыми DE и AC.

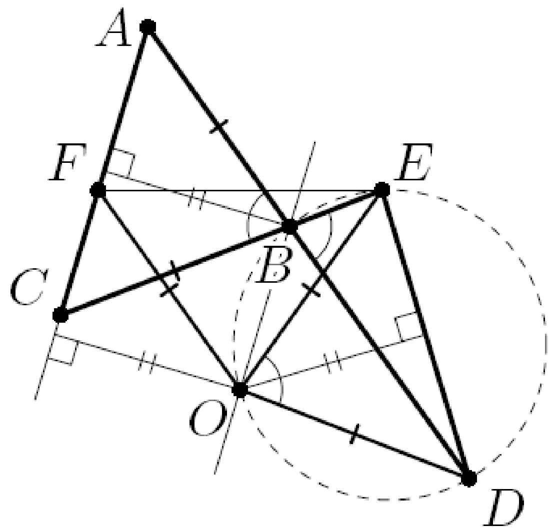

Рис. 2

Из условия $\angle DEF = \angle CFE$ вытекает, что эта биссектриса является серединными перпендикуляром к отрезку EF. Таким образом, $OF = OE = OD$. Иными словами, точка O – центр окружности, описанной около треугольника DFE. Следовательно, $2\angle DFE = \angle DOE = \angle ABC$, что и требовалось.

Второе решение. Для начала сделаем замечание. Пусть на прямой AC выбраны точки A' и C' такие, что $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$ и $\angle DA'C' = \angle EC'A'$; тогда $A' = A$ и $C' = C$. Действительно, если это не так и, скажем, точки A' и C' лежит на луче CA (рис. 3), то $\angle DA'C' < \angle DAC = \angle ECA < \angle EC'A'$, что невозможно.

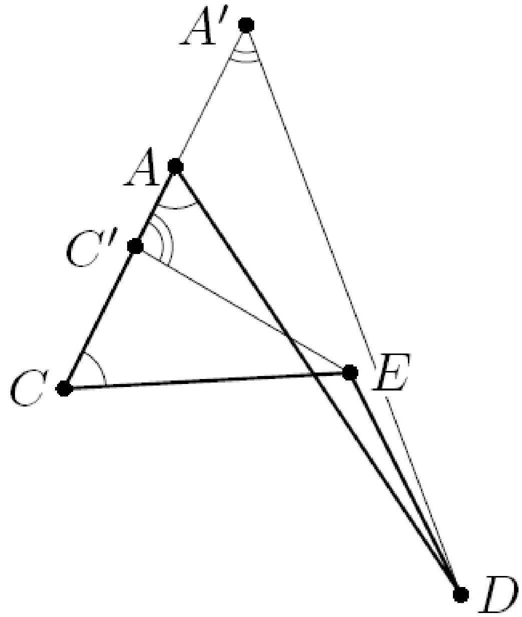

Рис. 3

Построим теперь такие точки. Пусть прямые DE и AC пересекаются в точке P; для определённости, пусть P лежит на луче DE. Выберем на прямой AC точку G такую, что $EF \parallel DG$. Тогда $DEFG$ – трапеция с равными углами при основании; следовательно, $FG = DE = AC$ и $DF = EG$. Пусть диагонали DF и EG пересекаются в точке Q. Пусть, наконец, описанные окружности треугольников PDQ и PEQ вторично пересекают прямую AC в точках A' и C' соответственно (рис. 4).

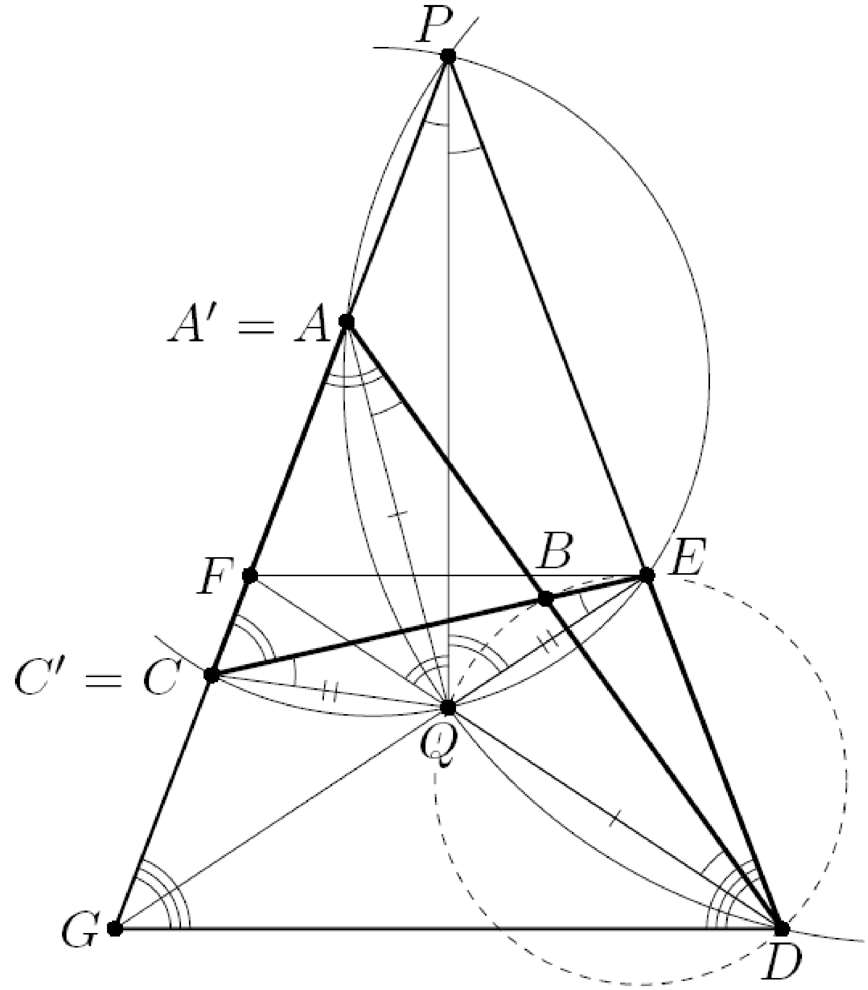

Рис. 4

Поскольку PQ – биссектриса угла APD, получаем $QA' = QD$ и $QC' = QE$. Кроме того, $\angle DQA' = 180^\circ - \angle DPG = \angle EQC'$. Значит, $\angle DQE = \angle A'QC'$; поэтому треугольник $A'QC'$ получается из DQE поворотом вокруг точки Q. Отсюда нетрудно получить, что $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$. Далее, из вписанности и симметрии имеем

$$\angle EC'P = \angle EQP = \angle FQP = 180^\circ - \angle DQP = \angle DA'C'.$$

По замечанию выше получаем, что $A = A'$ и $C = C'$.

Осталось завершить решение. Имеем $\angle ADQ = \angle APQ = \angle CEQ$. Отсюда следует, что точки D, E, B и Q лежат на одной окружности. Значит, $\angle ABC = \angle DBE = \angle DQE = \angle QEF + \angle QFE = 2\angle DFE$, что и требовалось доказать.

Замечание. Если $DE \parallel AC$, то точка F совпадает с A, что невозможно. Поэтому можно считать, что прямые DE и AC пересекаются. Кроме того, можно показать, что в условиях задачи P всегда лежит именно на луче DE.

Третье решение. Как и в предыдущем решении, достроим равнобокую трапецию $DEFG$ с точкой пересечения диагоналей Q. Как мы видели в том же решении, достаточно доказать, что точки D, E, B и Q лежат на одной окружности.

Выберем точку T так, что четырёхугольник $ACTD$ – параллелограмм (рис .5). Тогда $FGTD$ – также параллелограмм, ибо $\overrightarrow{DT} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FG}$. Значит, $GT = FD = GE$ и $\angle TCA = 180^\circ - \angle DAC = 180^\circ - \angle ECA$; первое равенство означает, что G лежит на серединном перпендикуляре к ET, а второе – что CG это внешняя биссектриса угла ECT. Но, как известно, эта внешняя биссектриса вторично пересекает описанную окружность треугольника ECT в точке, лежащей на серединном перпендикуляре к ET; значит, G и есть эта точка, и точки C, G, T, E лежат на одной окружности.

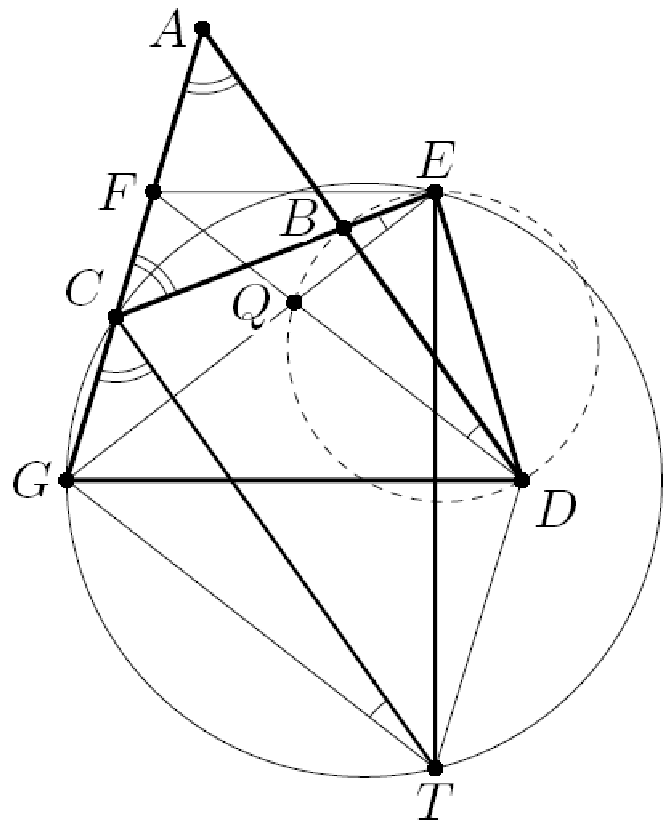

Рис. 5

Наконец, из этой окружности и двух параллелограммов получаем $\angle BDQ = \angle ADF = \angle CTG = \angle CEG = \angle BEQ$, то есть точки D, E, B и Q лежат на одной окружности; это мы и хотели доказать.

Комментарий.

Общие замечания. В этой задаче рекомендуется не снижать баллы за использование расположения точек, не влияющее существенно на ход решения – например, на расположение точки P пересечения прямых DE и AC, отсутствие разбора случая $DE \parallel AC$ и т. п.

Далее приведены критерии оценивания для работ, следующих по одному из предложенных решений. Остальные решения стоит оценивать по аналогии. Баллы по разным решениям не складываются друг с другом. Баллы в рамках одного решения могут складываться только если это указано явно.

Первое решение.

(1.1) Только построена точка O – 0 баллов.

(1.2) Показано, что треугольники ABC и DOE равны – 1 балл.

(1.3) Показано, что O равноудалена от прямых AC и DE – 3 балла.

(1.4) Доказано, что $OE = OF$ – 4 балла.

Второе решение.

(2.1) Только построена точка Q – 0 баллов.

(2.2) Задача сведена к доказательству того, что точки D, E, B, Q лежат на одной окружности – 1 балл.

(2.3) Высказано предположение, что треугольники AQC и DQE равны – 1 балл (может суммироваться с (2.2)).

(2.4) Из этого предположения выведено утверждение задачи – 2 балла (**не** суммируется с (2.2)).

(2.5) Только доказано, что треугольники AQC и DQE равны – 4 балла.

Третье решение.

(3.1) Только построена точка Q – 0 баллов.

(3.2) Задача сведена к доказательству того, что точки D, E, B, Q лежат на одной окружности – 1 балл.

(3.3) Построена точка T из решения, и задача сведена к доказательству того, что точки C, G, E, T лежат на одной окружности – 3 балла.

9.6. (И. Богданов) На доске записано 7 различных чисел, сумма которых равна 10. Петя умножил каждое из них на сумму остальных шести и записал 7 полученных произведений в тетрадь. Оказалось, что в тетради встречаются только четыре различных числа. Найдите одно из чисел, записанных на доске.

Ответ. -20.

Решение. Для каждого числа x, написанного на доске, произведение x и суммы шести оставшихся равно $f(x) = x(10-x) = 10x - x^2$. Квадратичная функция $f(x)$ принимает все значения, кроме максимального, два раза – а именно, в точках a и $10-a$. Значит, если $f(a) = f(b)$ при $a \neq b$, то $a+b=10$.

Таким образом, каждое число встречается в тетради не более двух раз. Значит, так как в тетради всего четыре различных числа, три из них встречаются по два раза, и ещё одно – один раз. Таким образом, шесть из семи чисел на доске разбиваются на пары так, что сумма чисел каждой пары равна 10. Значит, сумма этих шести чисел равна 30, тогда седьмое число равно $10-30=-20$.

Замечание 1. На доске могли быть выписаны любые семь чисел вида $-20, a, 10-a, b, 10-b, c, 10-c$ (если все эти семь чисел различны). Значит, ни одно число с доски, кроме -20, определить невозможно.

Замечание 2. Можно провести и прямое рассуждение, без ссылок на свойства квадратичной функции. Например, если $f(a) = f(b)$, то $0 = (10a - a^2) - (10b - b^2) = (a-b)(10-a-b)$, поэтому либо $a=b$, либо $a+b=10$.

Комментарий. Доказано только, что в тетради три числа встречаются по два раза, а четвёртое – один раз – 2 балла.

9.7. (И. Богданов) На окружности длиной 1 метр отмечена точка. Из неё в одну и ту же сторону одновременно побежали два таракана с различными постоянными скоростями. Каждый раз, когда быстрый таракан догонял медленного, медленный мгновенно разворачивался, не меняя скорости. Каждый раз, когда они встречались лицом к лицу, быстрый мгновенно разворачивался, не меняя скорости. На каком расстоянии от отмеченной точки могла произойти их сотая встреча?

Ответ. На нулевом.

Перовое решение. Назовём быстрого и медленного таракана B и M соответственно. Если таракан бежит в том же направлении, что и в момент старта, то будем говорить, что он бежит *вперёд*, в противном случае будем говорить, что он бежит *назад*.

До первой встречи оба таракана бегут вперёд, между первой и второй встречами B бежит вперёд, а M – назад. Между второй и третьей встречами оба таракана бегут назад, а между третьей и четвёртой встречами B бежит назад, а M – вперёд. Наконец, на четвёртой встрече B разворачивается, и они оба снова начинают бег вперёд.

Будем следить за перемещением M. Если между двумя встречами тараканы бегут в противоположные стороны, между такими встречаем всегда проходит одно и то же время, а значит, M всегда пробегает одно и то же расстояние. Таким образом, между первой и второй встречами, а также между третьей и четвертой встречами M пробегает одно и то же расстояние в противоположных направлениях. Аналогично, когда между двумя встречами тараканы бегут в одном направлении, это тоже всегда занимает одинаковое время, и M пробегает одно и то же расстояние. Таким образом, до первой встречи, а также между второй и третьей встречами M также пробегает одно и то же расстояние в противоположных направлениях. Стало быть, в момент четвертой встречи M (а значит, и B) будет в точке старта.

Далее эта ситуация будет повторяться каждые 4 встречи. Следовательно, в точке старта тараканы будут и в момент сотой встречи.

Второе решение. Обозначим тараканов так же, как и выше; пусть их скорости равны $b > m$ м/с. Для определенности будем считать, что изначально тараканы бегут по часовой стрелке, и расстояние будем отмерять именно в этом направлении.

Когда тараканы бегут в одну сторону, скорость удаления B от M равна $b-m$, поэтому до первой встречи они будут бежать $\frac{1}{b-m}$ секунд, и M до встречи пробежит $\frac{m}{b-m}$ метров. Дальше тараканы будут двигаться навстречу друг другу со скоростью сближения $b+m$, поэтому до второй встречи они будут бежать $\frac{1}{b+m}$ секунд, и до этой встречи M сместится от точки старта на $\frac{m}{b-m}-\frac{m}{b+m}=\frac{2m^2}{b^2-m^2}$ метров.

Дальше оба таракана будут бежать против часовой стрелки в течении $\frac{1}{b-m}$ секунд, поэтому общее смещение M от точки старта будет равно $\frac{2m^2}{b^2-m^2}-\frac{m}{b-m}=-\frac{m}{b+m}$ (т.е. в итоге он сместится на расстояние $\frac{m}{b+m}$ против часовой стрелки). Наконец, после этого M развернётся, и они будут бежать в противоположных направлениях $\frac{1}{b+m}$ секунд.

Следовательно, их четвёртая встреча произойдёт на расстоянии $-\frac{m}{b+m}+\frac{m}{b+m}=0$ от точки старта.

Таким образом, в четвёртый раз они обязательно встречаются в точке старта и после встречи снова побегут по часовой стрелке. Но тогда их сотая встреча также произойдет в точке старта.

Комментарий. При рассуждениях как во втором решении участники могут рассуждать не в терминах перемещения M, а в терминах «расстояния от точки старта». Формально эти рассуждения могут быть не совсем верны, ибо тараканы до встречи могут пробежать несколько кругов. Однако предлагается в случаях, когда решение в остальном верно, за это баллов не снижать.

9.8. (А. Матвеев) На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $BP=PQ=QC$. Точки X и Y выбраны соответственно на отрезках AC и AB так, что $PX\perp AC$ и $QY\perp AB$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC равноудалена от прямых XQ и YP.

Решение. Пусть M – середина BC (тогда M – ещё и середина PQ); пусть G – точка пересечения медиан треугольника ABC.

По свойству медианы имеем $MG:GA=1:2$. А так как $MP:PB=1:2$, получаем, что $PG\parallel BA$. Тогда $\angle YPG=\angle PYB$ и $\angle QPG=\angle PBY$. Но YP – медиана прямоугольного треугольника BYQ, поэтому $\angle PYB=\angle PBY$. Значит, $\angle YPG=\angle QPG$, т. е. PG – биссектриса угла QPY. Поэтому точка G равноудалена от прямых PQ и PY.

Аналогично показывается, что QG – биссектриса угла PQX, и потому точка G равноудалена от PQ и QX. Значит, она равноудалена от трёх прямых YP, PQ и XQ. Этим завершается решение.

Замечание. В ситуации, описанной в условии (когда треугольник ABC остроугольный), получается, что G – центр вневписанной окружности треугольника PQR, где R – точка пересечения прямых XQ и YP.

Комментарий. Показано, что $PG\parallel AB$ – 2 балла.

За получение различных соотношений между отрезками, углами и т. п., без дальнейшего их применения баллы не добавляются.

Из факта о том, что PQ и QG – биссектрисы углов QPY и PQX, делается вывод, что G – центр вневписанной окружности треугольника PQR (без обоснования, почему эта окружность вневписанная, а не вписанная) – баллы не снимаются.

9.9. (И. Богданов) Правильный треугольник T со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника T, отмечены. Назовём множество из нескольких отмеченных точек *линейным*, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне T. Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств? (Способы, отличающиеся порядком множеств, считаются одинаковыми.)

Ответ. $2^{3\cdot 37^2}=2^{4107}$.

Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной k, разобьём его на правильные треугольнички со стороной 1 и отметим все вершины этих треугольничков; полученную конструкцию назовём k*-треугольником*. В дальнейшем под *прямыми* мы всегда будем понимать прямые, параллельные сторонам этого треугольника и проходящие через хотя бы одну отмеченную точку.

Лемма. Пусть A – отмеченная точка в k-треугольнике. Тогда существует единственный способ провести k прямых так, что все отмеченные точки, кроме, возможно, A, покрыты этими прямыми. А именно, для каждой стороны k-треугольника надо провести все прямые, параллельные ей и лежащие между этой стороной и точкой A (включая саму сторону, но исключая прямую, содержащую A) (рис. 6).

Доказательство леммы. Индукция по k. База при $k=1$ проверяется легко: надо провести прямую, содержащую две оставшихся точки, кроме A.

Для перехода рассмотрим сторону k-треугольника, на которой не лежит A. Если прямая, содержащая эту сторону, не проведена, то все $k+1$ отмеченных точек на этой прямой должны быть покрыты различными прямыми; это невозможно, так как прямых k. Значит, эта прямая проведена. Выкинув её и точки k-треугольника, лежащие на ней, получаем $(k-1)$-треугольник, в котором проведено $k-1$ прямых с теми же условиями. Осталось применить предположение индукции. Лемма доказана.

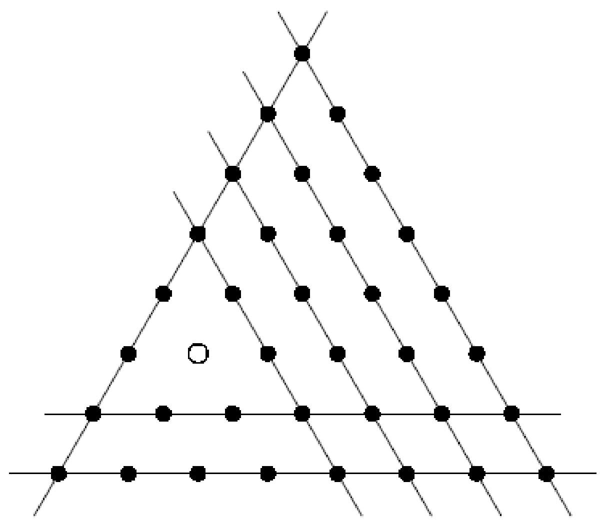

Рис. 6

Перейдём к задаче. Рассмотрим одно из разбиений на линейные множества. Для каждого множества проведём прямую, его содержащую. Тогда эти прямые покрыли все отмеченные точки 111-треугольника, кроме, возможно, его центра A. Значит, эти прямые устроены так, как описано в лемме, и для любого разбиения этот набор прямых один и тот же.

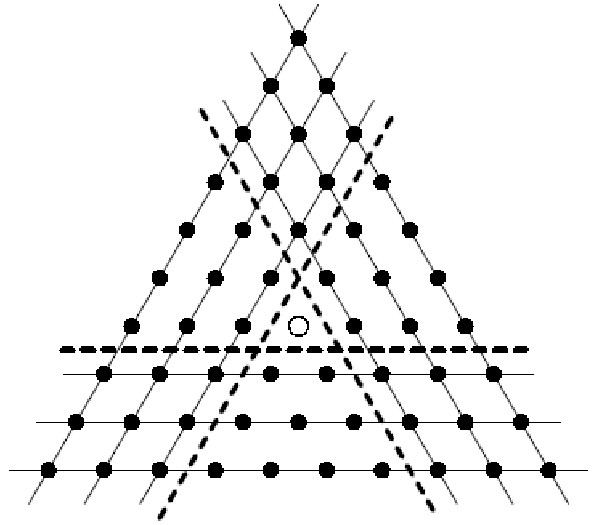

Рис. 7

Заметим, что наш 111-треугольник разбился на 6 областей: три «ромба» в углах, состоящих из точек, покрытых нашими прямыми дважды, и три «трапеции» у сторон, в которых каждая точка покрыты одной прямой (рис. 7). Тогда каждая точка в «трапеции» относится к множеству, лежащему на этой прямой; каждую же точку в «ромбе» можно отнести к любому из двух множеств, лежащих на проходящих через неё прямых. Все такие выборы можно сделать независимо друг от друга. Поскольку в каждом из трёх «ромбов» всего 37^2 точек, получаем, что требуемых разбиений ровно $2^{3\cdot 37^2}$.

Замечание. Вариант доказательства леммы можно получить, показав сначала, что такое покрытие невозможно осуществить при помощи менее, чем k прямых.

Комментарий. Доказано только, что все точки, кроме одной, нельзя покрыть менее чем 111 прямыми – 1 балл.

Доказана только лемма, а подсчёт проведён неверно – 4 балла.

Лемма используется без доказательства — не более 3 баллов.

Во в целом верном подсчёте допущена ошибка на ± 1 (например, утверждается, что в ромбах по 36^2 или по 38^2 точек) – снимается 1 балл.

9.10. (А. Чиронов) Существует ли натуральное число $n > 10^{100}$ такое, что десятичные записи чисел n^2 и $(n+1)^2$ отличаются перестановкой цифр? (Иначе говоря, в десятичных записях чисел n^2 и $(n+1)^2$ должно быть поровну цифр 0, поровну цифр 1, …, поровну цифр 9.)

Ответ. Существует.

Первое решение. Заметим, что числа $13^2 = 169$ и $14^2 = 196$ получаются друг из друга перестановкой цифр.

Пусть теперь $a = \frac{1}{2}(13\cdot 1000 + 14) = 6507$. Положим $n = 10^{100}\cdot a + 13$. Заметим тогда, что

$$n^2 = 10^{200}\cdot a^2 + 10^{100}\cdot(1000\cdot 13^2 + 14\cdot 13) + 13^2, (n+1)^2 = 10^{200}\cdot a^2 + 10^{100}\cdot(1000\cdot 13\cdot 14 + 14^2) + 14^2.$$

Иначе говоря, десятичная запись числа n^2 состоит из блоков a^2, $182 = 14\cdot 13$ и $169 = 13^2$ (дважды), разделённых нулями; у числа же $(n+1)^2$ эти блоки суть a^2, $182 = 13\cdot 14$ и $196 = 14^2$ (дважды). Поскольку количества разделяющих нулей в обоих случаях одинаковы, получаем, что число n удовлетворяет требованиям.

Замечание. Подобная же конструкция сработает, если вместо 13 и 14 взять произвольные числа k и $k+1$, квадраты которых отличаются друг от друга перестановкой цифр, а вместо a выбрать такое число t, для которого числа $2tk$ и $2t(k+1)$ также отличаются друг от друга перестановкой цифр. Существуют и другие способы подобрать такие числа k и t.

Второе решение. Предположим, что нам удалось найти такое число b (возможно, с ведущим нулём), что набор цифр в десятичной записи числа $2b$ отличается от набора цифр в десятичной записи числа b выкидыванием цифры 4 и добавлением цифры 1 (иначе говоря, если к числу b приписать единицу, а к $2b$ – четвёрку, то полученные числа отличаются перестановкой цифр). Тогда в качестве числа n можно выбрать $n = 5\cdot 10^d \cdot b + 1$ (где $d > 100$, и $d-1$ больше количества цифр в числе $2b$). Действительно, имеем

$$n^2 = 1 + 10^{d+1}\cdot b + 10^{2d}\cdot 25b^2, (n+1)^2 = 4 + 10^{d+1}\cdot 2b + 10^{2d}\cdot 25b^2,$$

и мы опять видим, что эти числа состоят из блоков $(1, b, 25b^2)$ и $(4, 2b, 25b^2)$, разделённых нулями, а блоки получаются друг из друга перестановкой цифр.

Осталось найти такое число b. Если, например, потребовать, чтобы запись числа $2b$ получалась из записи числа b циклическим сдвигом и заменой 4 на 1, то такое число нетрудно найти, выписывая его цифры с конца. Подойдёт, например. число $b = 0526315789473684$; тогда $2b = 1052631578947368$.

Замечание. Это решение, разумеется, также допускает вариации.