

10 класс

1. Сколько всего шестизначных натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 5 и каждая последующая цифра меньше предыдущей?
2. Решите уравнение в целых числах: $19a^3 - 7b^2 = 2024$.
3. Рассматриваются все трапеции площади 1, длины диагоналей которых d_1 и d_2 , $d_1 \geq d_2$. Какова наименьшая возможная длина диагонали d_1 у таких трапеций? (Напомним, что трапецией является выпуклый четырехугольник, две стороны которого параллельны, две другие – не параллельны)
4. Известно, что уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет два различных действительных корня. Сколько различных действительных корней имеет уравнение $x^4 - bx^3 + (c - 2)x^2 + bx + 1 = 0$?
5. В треугольнике MNP известно, что $NP > MN$. Биссектриса NL внутреннего угла треугольника пересекает окружность, описанную около треугольника MNP , в точке Q . На отрезке NP выбрана точка K так, что $NK = NM$. Докажите, что около четырехугольника $KPQL$ можно описать окружность.
6. В классе учатся 20 учеников. Известно, что любые два ученика либо дружат друг с другом, либо не дружат. Если дружат – могут списать домашнее задание друг у друга, если не дружат – не могут. Учитель знает, что если хотя бы один ученик сделает домашнее задание, то к следующему уроку оно будет сделано у всех. Докажите, что можно выделить 6 учеников из этого класса так, что все остальные либо дружат с кем-то из этих шести, либо дружат с кем-то из друзей этих шести.