

Условия задач

(районная математическая олимпиада 2023 г.)

10 класс

1. Первый член геометрической прогрессии со знаменателем 2 равен 1. Может ли произведение нескольких первых членов этой прогрессии равняться 2^{2023} ?

2. Докажите, что если $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$, то $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$.

3. Найдите наименьшее значение функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 12y + 52} + \sqrt{x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13}$$

4. Пусть $S(n)$ – сумма цифр числа n , а $S(S(n))$ – сумма цифр суммы цифр числа n .

а) Существует ли натуральное n , такое, что $n + S(n) = 2000$?

б) Существует ли натуральное n , такое, что $n + S(n) + S(S(n)) = 2000$?

5. На координатной плоскости Oxy нарисована парабола $y = \frac{1}{2}x^2$. Прямая, проходящая через точку $(0;2)$, пересекает параболу в точках A и B . Найдите величину угла AOB .