

Комплект заданий для муниципального этапа олимпиады по математике

10 класс

1. Известно, что функция $y(t)$ является убывающей на всей области определения. Решите неравенство $y\left(\frac{x}{x-1}\right) \leq y\left(\frac{1}{x+3}\right)$.
2. Для проведения семи разных мероприятий планируется задействовать несколько школьников так, чтобы в каждом мероприятии участвовало ровно три школьника, каждый школьник участвовал ровно в трех мероприятиях и любые два школьника могут встретиться только на одном мероприятии из этих семи. Какое наименьшее количество школьников для этого потребуется?
3. У Васи есть одна конфета и неограниченное количество конфет в отдельном мешке. Вася сам с собой играет в игру. Он подбрасывает монетку и, если выпадает решка, то Вася свою конфету перекладывает в мешок, а, если выпадает орел, то Вася из мешка берет одну конфету. Если у Васи не остается конфет, то игра заканчивается (Вася проиграл). Вася готов играть в эту игру бесконечно. Какова вероятность, что эта игра никогда не закончится? (Выпадение каждой грани монеты равновозможно).
4. Дан треугольник ABC на сторонах которого вовне построены два параллелограмма $ACDE$ и $BCFG$. Продолжения сторон DE и FG пересекаются в точке P . На стороне AB построен параллелограмм $ABML$, стороны AL и BM которого равны и параллельны PC . Доказать, что площадь параллелограмма $ABML$ равна сумме площадей параллелограммов, построенных на сторонах AC и BC треугольника ABC .
5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} xy - 6 = \frac{y^3}{x}, \\ xy + 24 = \frac{x^3}{y} \end{cases}$$