МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
2023–2024 УЧЕБНОГО ГОДА

Комплект заданий для учеников 10 классов

Уважаемый участник Олимпиады!

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

Максимальная оценка — 42 балла.

Время на выполнение заданий — 3 часа 55 минут.

Желаем вам успеха!

10.1. В кошельке лежит 26 монет номиналами 1, 2 или 5 рублей. Известно, что если вытаскивать из кошелька монеты по одной, не глядя, то среди 20-и первых вытащенных окажется, как минимум, 1 монета достоинством в один рубль, 2 монеты достоинством в два рубля и 5 монет достоинством в пять рублей. Сколько денег в кошельке? Ответ обоснуйте.

10.2. В трапеции $ABCD$ (AB и CD — основания) M — середина диагонали AC, и площади треугольников ABM и ACD равны. Докажите, что прямые DM и BC параллельны.

10.3. а) Существует ли функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такая, что для всех $x \in \mathbf{R}$ выполняется равенство $f(\sin x) + f(\cos x) = 1$?

б) Существует ли функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такая, что для всех $x \in \mathbf{R}$ выполняется равенство $f(\sin x) - f(\cos x) = 1$? Ответы обоснуйте.

10.4. Имеется 11 таких натуральных чисел, что суммы любых двух из них попарно различны. Докажите, что разность каких-то двух их них больше 27.

10.5. Из одной точки круговой дорожки ледового стадиона в одном направлении одновременно стартовали два конькобежца. Первый бежит равномерно, и пробегает круг за 40 сек. Второй начинает быстрее, и первый круг пробегает за 30 сек, но в дальнейшем его скорость падает (не обязательно равномерно); при этом на каждый следующий круг он тратит ровно на 1 сек больше, чем на предыдущий.

а) Через сколько секунд с момента начала бега оба конькобежца впервые одновременно окажутся в точке старта?

б) Сколько раз они одновременно окажутся в точке старта, если будут бегать в течение 1 часа?

Ответы обоснуйте.

10.6. Даны две скрещивающиеся прямые l и m. Укажите геометрическое место таких точек A, что существует единственная прямая, проходящая через точку A и пересекающая обе прямые l и m.