

## 10 класс

1. Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по 2 числа. Известно, что произведение чисел одной группы на 2023 меньше, чем произведение чисел другой группы. Найдите эти числа.
2. Даны различные действительные числа  $a$  и  $b$ . Верно ли, что хотя бы одно из уравнений  $(x + a)(x + b) = x - a$ ,  $(x - a)(x - b) = x + b$  имеет решение?
3. В некотором государстве было решено построить 20 новых городов на 11 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.
4. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Луч  $O_1A$  пересекает окружность  $\omega_2$  вторично в точке  $M$ , а луч  $O_2A$  пересекает  $\omega_1$  вторично в точке  $N$ . Прямая  $MN$  вторично пересекает эти окружности в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Найдите отношение  $AE : AF$ .
5. Положительные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Докажите, что

$$\frac{1}{2 + ab} + \frac{1}{2 + bc} + \frac{1}{2 + ca} \geq 1.$$

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.  
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.  
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.