

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

Муниципальный этап

10 класс

*Уважаемый участник олимпиады!*

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения заданий – 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

- не спеша, внимательно прочитайте задания;
- не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;
- решение каждой задачи начинайте с новой страницы;
- задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);
- после выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Условия задач

10.1. Числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют равенству

$$\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4} = 1. \text{ Найдите все возможные значения выражения } \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

10.2. Если в многочлен  $Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$  вместо букв  $A, B, C, D, E, F$  подставить числа 21, -16, 13, -47, 46, -17, то будут получаться многочлены от переменной  $x$ . Докажите, что у всех этих многочленов будет общий корень.

10.3. На сторонах  $AB, BC$  и  $CA$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $R, P, Q$  так, что отрезки  $AP, BQ$  и  $CR$  пересекаются в одной точке  $M$ . Докажите, что если  $S_{AMQ} = S_{AMR}, S_{BMR} = S_{BMP}$  и  $S_{CMP} = S_{CMQ}$ , то  $M$  – точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

10.4. В каждой вершине правильного 2023-угольника записано положительное число, причем каждое из этих чисел равно среднему геометрическому двух чисел, записанных в соседних вершинах. Докажите, что все записанные в вершинах числа равны между собой.

10.5. У Ивана есть три банки с красками разного цвета. Сколькими различными способами он может покрасить забор, состоящий из 10 досок, так, чтобы любые 2 соседние доски были разных цветов и при этом он использовал краски всех трех цветов?