Региональный этап 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике

11 класс

Первый день

11.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, …, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?

11.2. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2024}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. При $i = 1, 2, \ldots, 2024$ обозначим $p_i = (x_1 - \frac{1}{x_1})(x_2 - \frac{1}{x_2})\ldots(x_i - \frac{1}{x_i})$. Какое наибольшее количество натуральных чисел может содержаться среди чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{2024}$?

11.3. По кругу стоят 100 белых точек. Аня и Боря красят по очереди по одной ещё не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Аня. Аня хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Боря – чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Аня может гарантировать себе независимо от игры Бори?

11.4. На отрезке XY как на диаметре построена полуокружность и выбрана произвольная точка Z на этом отрезке. Девять лучей из точки Z делят развернутый угол XZY на 10 равных частей и пересекают полуокружность в точках $A_1, A_2, \ldots, A_9$ соответственно (в порядке обхода от X к Y). Докажите, что сумма площадей треугольников A_2ZA_3 и A_7ZA_8 равна площади четырехугольника $A_2A_3A_7A_8$.

11.5. Уравнение $t^4 + at^3 + bt^2 = (a+b)(2t-1)$ имеет положительные решения $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Докажите, что $t_1t_4 > t_2t_3$.