

Региональный этап 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике

11 класс

Второй день

11.6. У учителя есть 100 гирь массами 1 г, 2 г, ..., 100 г. Он хочет раздать Пете и Васе по 30 гирь так, чтобы выполнялось следующее условие: никакие 11 Петиних гирь не уравниваются никакими 12 Васиными гирями, а также никакие 11 Васиных гирь не уравниваются никакими 12 Петиними гирями. Сможет ли учитель это сделать?

11.7. График G_1 квадратного трехчлена $y = px^2 + qx + r$ с вещественными коэффициентами пересекает график G_2 квадратного трехчлена $y = x^2$ в точках A и B . Касательные в точках A и B к графику G_2 пересекаются в точке C . Оказалось, что точка C лежит на графике G_1 . Найдите все возможные значения p .

11.8. В пространстве расположены отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 с общей серединой M . Оказалось, что сфера ω , описанная около тетраэдра $MA_1B_1C_1$, касается плоскости ABC в точке D . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Докажите, что $MO = MD$.

11.9. Правильный треугольник T со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника T , отмечены. Назовём множество из нескольких отмеченных точек *линейным*, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне T . Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств? (Способы, отличающиеся порядком множеств, считаются одинаковыми.)

11.10. Дано натуральное число $n > 100$. Изначально на доске написано число 1. Каждую минуту Петя представляет число, записанное на доске, в виде суммы двух неравных положительных несократимых дробей, а Вася оставляет на доске только одну из этих двух дробей. Докажите, что Петя может добиться того, чтобы знаменатель оставшейся дроби через n минут не превышал $2^n + 50$ вне зависимости от действий Васи.