

2023/24 уч. год

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО  
МАТЕМАТИКЕ**

**МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП**

**11-й класс**

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения заданий – 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

- не спеша, внимательно прочитайте задания;
- не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;
- решение каждой задачи начинайте с новой страницы;
- задача считается решённой, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);
- после выполнения заданий ещё раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

### Условия задач

11.1. Определите количество корней уравнения  $\operatorname{tg} \pi x \cdot \sin \pi x = \operatorname{tg} \pi x$ , принадлежащих отрезку  $[0; 2023]$ .

11.2. На берегу круглого озера находятся четыре пристани:  $K, L, P, Q$ . От пристани  $K$  отплывает катер, движущийся с постоянной скоростью, а от пристани  $L$  – лодка, которая также движется с постоянной скоростью. Если катер поплывёт прямо к  $P$ , а лодка к  $Q$ , то они встретятся в некоторой точке  $X$  озера. Докажите, что если катер поплывет к  $Q$ , а лодка к  $P$ , то они достигнут этих пристаней одновременно.

11.3. Пусть  $AD$  – медиана треугольника  $ABC$ . Чему равен угол  $A$ , если известно, что  $4 \cdot AD^2 \cdot BC^2 = AB^4 + AC^4$ ?

11.4. Функция  $f$  такова, что для всех действительных  $x$  выполняется равенство:  $f(x + 1) + f(x - 1) = \sqrt{2} f(x)$ . Докажите, что функция  $f$  является периодической функцией. Найдите её период. Приведите пример такой функции.

11.5. Президент акционерного общества «Не обманешь – не продашь» объявил на собрании акционеров, что за каждые пять последовательных месяцев расход фирмы превышал доход, а за весь год доход фирмы всё же превысил расход. Могло ли такое быть?