

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
2023–2024 учебный год

11 КЛАСС

11.1. Что больше, $\sin 1 \sin 2$ или $\sin 7 + \sin 8$?

И. Двойнишников, Д. Минеев

11.2. На Новый Год магазин подарков украсил витрину гирляндой из $2n + 1$ лампочки. Все лампочки имеют попарно различные цвета, а первая и последняя лампочка не соединены напрямую. В новогоднюю ночь произошёл сбой: каждая лампочка поменяла свой цвет на цвет одной из своих соседок. Докажите, что теперь найдутся две лампочки одного цвета.

И. Двойнишников

11.3. Барон Мюнхгаузен имеет репутацию лжеца. Недавно он утверждал, что знает такое натуральное число, которое имеет не менее 2023 делителей, отличных от единицы, каждые два из которых имеют наибольший общий делитель, больший 2023. Обманывает ли нас Барон на этот раз?

И. Двойнишников

11.4. Таблица размера $n \times n$ заполнена произвольными положительными числами. Петя подсчитал сумму чисел в каждой строке и получил числа a_1, a_2, \dots, a_n . Вася подсчитал сумму чисел в каждом столбце и получил числа b_1, b_2, \dots, b_n . Затем они составили многочлены

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n),$$

$$Q(x) = (x - b_1)(x - b_2) \cdot \dots \cdot (x - b_n).$$

В конце концов Толя решил уравнение $P(x) - Q(x) = 0$ и сказал, что получил $(n - 1)$ корень. Докажите, что Толя ошибся.

И. Двойнишников

11.5. AP и BQ — высоты остроугольного неравностороннего треугольника ABC , AL — его биссектриса, а M — середина стороны AB . Описанная окружность треугольника AMP пересекает луч PQ в точке K . Лучи AK и BC пересекаются в точке S . Докажите, что треугольник ALS равнобедренный.

Д. Минеев