

РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП

2023

11 КЛАССА

Задача 1. Дана последовательность $\left\{x_n = \frac{n^2 + n}{2}\right\}$ ($n = 1, 2, \dots$). Докажите, что

для любых двух членов x_k и x_m этой последовательности число $x_k + x_m + km$ тоже является ее членом.

Задача 2. Может ли сумма квадратов синусов углов треугольника равняться 2?

Задача 3. Шнур длиной 3 м состоит из нескольких зеленых и нескольких красных участков. Зеленый участок горит со скоростью 3 см/сек, а красный — со скоростью 2 см/сек. Когда шнур подожгли одновременно с двух концов, он сгорел за 59 секунд. Какова суммарная длина красных участков шнура?

Задача 4. Найдутся ли такие пять различных натуральных чисел a, b, c, d, e , что среди дробей $a/b, a/c, a/d, a/e, b/c, b/d, b/e, c/d, c/e, d/e$ семь сократимы, а три не сократимы?

Задача 5. Шестиугольник $ABCDEF$, все углы которого меньше 180 градусов, таков, что каждый треугольник, образованный тремя идущими подряд его вершинами, имеет площадь 1. Докажите, что если $AB < DE$, то $BC > EF$.

Задача 6. В классе каждый ученик дружит ровно с шестью другими, и у любых двух учеников есть ровно два общих друга. а) Сколько учеников в этом классе? б) Докажите, что такая ситуация действительно возможна. (Считается, что если A дружит с B , то и B дружит с A .)