

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

2023-2024 учебный год

11 класс

1. Корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ сравны $\sin 31^\circ$ и $\sin 59^\circ$. Докажите, что $b^2 = a^2 + 2ac$.
2. Назовём число хорошим, если его можно представить в виде суммы факториалов трёх разных натуральных чисел (например, 9 – хорошее число, так как $9 = 1! + 2! + 3!$). Докажите, что бесконечно много натуральных чисел не являются хорошими. (Напомним, что факториал числа n – это произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, обозначается как $n!$)
3. В классе поровну мальчиков и девочек. Каждый мальчик написал, сколько в классе девочек выше его, а каждая девочка написала, сколько в классе мальчиков ниже её. Оказалось, что все написанные числа не меньше четверти числа учеников в классе. Докажите, что суммарный рост девочек в классе больше суммарного роста мальчиков.
4. Через центр вписанной окружности четырехугольника $ABCD$ проведена прямая. Она пересекает сторону AB в точке X и сторону CD в точке Y . Оказалось, что $\angle AXH = \angle DYH$. Докажите, что $\frac{AX}{BX} = \frac{CY}{DY}$.
5. Двадцать бегунов два раза участвовали в забеге. Каждый раз все занимали разные места. Один из них сказал: “Мое место во втором забеге такое же, как в первом”, другой сказал: “Мое место во втором забеге на 1 выше, чем в первом”, следующий: “Мое место во втором забеге на 2 выше, чем в первом забеге”, ..., последний сказал: “Мое место во втором забеге было на 19 выше, чем в первом”. Какое наибольшее количество из этих утверждений могло оказаться правдой?