

11 класс

В скобках указан максимальный балл за задачу

11.1 (7 баллов) О вещественных числах a и b известно, что $a^3 < b$ и $b^7 < a$. Докажите, что из неравенств $2ab < a + b$ и $a^4 + b^4 > a + b$ выполняется ровно одно.

11.2 (7 баллов) В киноклубе 29 участников и по уставу каждый участник один раз в год устраивает кинопоказ. За прошедший год на каждый из 29 кинопоказов пришли некоторые участники (ни на один показ не пришли все сразу, но на каждом показе был кто-то кроме хозяина). Возможно ли, что любые два участника киноклуба встретились на показах одинаковое число раз? (Считаем, что на каждом кинопоказе все пришедшие на него встретились между собой и каждый пришедший встретился с хозяином.)

11.3 (7 баллов) Пусть m и n – натуральные числа и $2^m > 5^n$. Каково наименьшее возможное значение разности $2^m - 5^n$?

11.4 (7 баллов) Точки B и C зафиксированы на окружности ω , а точка A движется по дуге BC . Зафиксируем на хорде BC точку K . Прямая, проходящая через K параллельно OB , пересекает прямую AB в точке B_1 . Прямая, проходящая через K параллельно OC , пересекает прямую AC в точке C_1 . Докажите, что центр описанной окружности треугольника AB_1C_1 движется по прямой BC .

11.5 (7 баллов) Последовательность b_1, b_2, \dots, b_n назовем *хорошей*, если $b_k = k$ или $b_k = k + 1$ для каждого натурального $k = 1, 2, \dots, n$. Если сумма $S = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ четна, то назовем хорошую последовательность *четной*, в противном случае назовем ее *нечетной*. Для каждой нечетной хорошей последовательности вычислили произведение входящих в нее чисел и написали это произведение на бумажку. Для каждой четной хорошей последовательности вычислили произведение входящих в нее чисел и написали это произведение на картонку. Что больше: сумма чисел на бумажке или сумма чисел на картонке, и на сколько?