

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП**

2023-2024 учебный год

11 класс

Инструкция по выполнению заданий: Вам предлагается решить математические задачи, указав в каждой из них ответ и развёрнутое решение, либо обоснование ответа. Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Задачи можно решать в любом порядке. Время выполнения заданий - 235 минут.

11.1. В правильном 30-угольнике одну вершину покрасили в красный цвет, а остальные – в синий. Сколькими способами можно выбрать прямоугольный треугольник с одной красной и двумя синими вершинами?

11.2. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, ..., 99, 100 и 102. За одну операцию можно выбрать несколько чисел, среднее арифметическое которых – целое число, стереть эти числа и вместо них записать на доску их среднее арифметическое. За какое наименьшее число операций можно оставить на доске только одно число?

11.3. Дан непрямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, точки O, O_1, O_2, O_3, O_4 – соответственно центры граней $A_1 B_1 C_1 D_1, AA_1 B_1 B, BB_1 C_1 C, CC_1 D_1 D, DD_1 A_1 A$. Известно, что углы $O_1 O O_3$ и $O_2 O O_4$ – прямые. Докажите, что четырёхугольник $O_1 O_2 O_3 O_4$ – прямоугольник.

11.4. Какие значения может принимать сумма $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z$, если известно, что выполняются равенства $\cos 2x = \operatorname{tg} y + 1$, $\cos 2y = \operatorname{tg} z + 1$, $\cos 2z = \operatorname{tg} x + 1$?

11.5. На столе лежат 170 карточек с числами от 1 до 170. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход можно взять со стола любую карточку. Игра заканчивается, когда на столе останется две карточки. Второй выигрывает, если числа на оставшихся карточках отличаются ровно на 10 или на число, делящееся на 11. Иначе выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре?