

**Задания муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников
Новосибирской области по математике 2023-2024 г.г.**

11 класс

11.1. Доказать, что если для трёх ненулевых чисел x, y, z выполняются равенства

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}, \text{ то либо } x = y = z, \text{ либо } x^2 y^2 z^2 = 1.$$

11.2. Две окружности пересекаются в точках P и Q , при этом центр O_1 первой окружности лежит вне второй, а центр O_2 второй окружности - вне первой. На первой окружности вне второй выбрана произвольная точка A , отличная от P и Q , через неё проведены две прямые AP и AQ , пересекающие второй раз вторую окружность в точках B и C соответственно вне первой. Докажите, что прямые AO_1 и BC перпендикулярны.

11.3. В турнире по олимпийской системе участвуют 8 борцов одинаковой силы, среди которых есть Вася и Петя. Их случайным образом разбивают на 4 пары, после чего победителей в каждой паре также случайно разбивают на две пары, победители которых встречаются в финале. В каждой схватке каждый из борцов побеждает другого с вероятностью ровно $\frac{1}{2}$. Какова вероятность того, что Вася и Петя встретятся между собой в ходе турнира?

11.4. Найти все натуральные N такие, что числа $4N - 3$ и $9N + 1$ являются квадратами натуральных чисел.

11.5. Каждое из натуральных чисел от 1 до n окрасили в красный или синий цвет и подсчитали среднее арифметическое красных чисел и среднее арифметическое синих чисел. После этого одно из красных чисел перекрасили в синий цвет, после чего среднее арифметическое красных чисел и среднее арифметическое синих чисел одновременно увеличились на одно и то же число x . Найти максимальное значение x .