

Региональный этап 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике

9 класс

Первый день

9.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1 , 1×2 , 1×3 , ..., 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?

9.2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Для данного числа $k > 0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k . Докажите, что диагонали всех таких трапеций проходят через одну точку.

9.3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Для игры в настольный теннис навзлет всех жителей острова разделили на две команды A и B , причём в A жителей было больше, чем в B . Начали игру два игрока разных команд; после каждой партии проигравший игрок навсегда выходил из игры, и его заменял другой (ещё не игравший) член его команды. Проиграла команда, все члены которой вышли из игры. После турнира каждого члена команды A спросили: «Правда ли, что в какой-то игре ты проиграл лжецу?», а каждого члена команды B спросили: «Правда ли, что ты выиграл хотя бы у двух рыцарей?». Все ответы оказались утвердительными. Какая команда победила – A или B ?

9.4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500.

9.5. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На продолжениях боковых сторон AB и BC за точку B отмечены точки D и E соответственно, а на основании AC отмечена точка F , причём $AC = DE$ и $\angle CFE = \angle DEF$. Докажите, что $\angle ABC = 2\angle DFE$.