

9 класс

В скобках указан максимальный балл за задачу

9.1 (7 баллов) Докажите, что если абсциссы точек пересечения прямой ℓ с графиком функции $y = x^2$ равны x_1 и x_2 ($x_1 \neq x_2$), а абсцисса точки пересечения ℓ с осью абсцисс не совпадает ни с x_1 , ни с x_2 и равна x_0 , то

$$\frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

9.2 (7 баллов) Целая часть числа a – это наибольшее целое число, не превосходящее a . Целая часть a обозначается $[a]$. Например, $[2, 34] = 2$, $[-\pi] = -4$ и $[5] = 5$. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$\left[\frac{x}{20} \right] = \left[\frac{x}{23} \right] + 1?$$

9.3 (7 баллов) 77 глупцов встали в большой круг. Раз в минуту каждый из них одновременно с другими говорит одну из двух фраз: «Все хорошо!» или «Все плохо!». При этом *каждый* глупец, оба соседа которого сказали фразу, отличающуюся от его фразы, при очередном высказывании меняет свое высказывание. Остальные же глупцы в очередную минуту произносят ту же фразу, что и на прошлой минуте. Докажите, что настанет момент, когда высказывания перестанут меняться.

9.4 (7 баллов) Треугольник ABC – равнобедренный ($AB = BC$). На продолжении AC за точку C выбрана точка M . Докажите что разность расстояний от точки M до прямых AB и BC равна длине высоты $АН$ треугольника ABC .

9.5 Имеется кучка аккумуляторов, среди которых ℓ заряженных и n разряженных. Заряженные и разряженные аккумуляторы перемешаны и не отличаются на вид. Если в детскую машинку вставить два заряженных аккумулятора и включить машинку, то машинка поедет. А если хотя бы один аккумулятор из двух разряжен – то не поедет. Назовем *пробой* установку пары аккумуляторов и включение машинки. Какое наименьшее число проб гарантирует, что машинка поедет, если:

- а) (3 балла) $\ell = n + 1$;
- б) (4 балла) $\ell = n$?