



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ  
РАЙОННЫЙ ЭТАП  
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
18 НОЯБРЯ 2023 Г. I ТУР 9 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Саша отметил на прямой 200 точек и для каждого двух точек выписал в тетрадку расстояние между ними. Все 19 900 выписанных чисел оказались целыми, и одно из них равно 2023. Саша подчеркнул все числа, не делящиеся на 4. Какое наименьшее количество подчеркнутых чисел могло оказаться в тетрадке?

2. В замке Кашея Бессмертного за круглым столом сидят 100 Василис. Каждая — либо в образе царевны, либо в образе лягушки. Раз в минуту все Василисы *одновременно* превращаются по следующему правилу: если Василиса сидела между двумя лягушками, то следующую минуту она проводит в образе лягушки; в противном случае она будет царевной или лягушкой — по желанию Кашея. Вначале одна Василиса была царевной, а все остальные — лягушками. Какое наибольшее количество царевен за столом может обеспечить Кашей?

3. Назовем натуральное число  $N$  *странным*, если выполнено следующее условие:

*при любом разбиении числа 20242023 в сумму двух натуральных слагаемых число  $N$  делится ровно на одно из этих слагаемых.*

Дима выписал по возрастанию первые 200 странных чисел. Найдите отношение двухсотого странного числа к первому.

4. Точка  $O$  выбрана внутри, а точка  $M$  — вне прямоугольника  $ABCD$  так, что отрезок  $OM$  пересекает сторону  $AB$ . Известно, что  $BO = MO$  и  $\angle BCO = \angle ODA = \angle MBA$ . Кроме того,  $\angle BMD = 80^\circ$ . Найдите  $\angle BDM$ .

5. Существует ли возрастающая последовательность натуральных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  такая, что при всех  $m, n > 1$

$$a_m a_n < a_{mn} < 1,001 a_m a_n?$$

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО; ДАТА РОЖДЕНИЯ; ТЕЛЕФОН; КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ; ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние. Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах [www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [olymp.academtalant.ru](http://olymp.academtalant.ru)



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ  
РАЙОННЫЙ ЭТАП  
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
18 НОЯБРЯ 2023 Г. I ТУР 9 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Сергей отметил на прямой 101 точку и для каждого двух точек выписал в тетрадку расстояние между ними. Все 5050 выписанных чисел оказались целыми, и одно из них равно 2024. Сергей подчеркнул все числа, не делящиеся на 5. Какое наименьшее количество подчеркнутых чисел могло оказаться в тетрадке?

2. Белоснежка созвала на пир 200 гномов и рассадила их за круглым столом. Раз в минуту по сигналу Белоснежки гномы *одновременно* съедают по одному фрукту (манго или яблоку). При этом если гном сидит между двумя гномами, которые съели манго, то в следующий раз он сам съедает манго; в противном случае следующий фрукт ему выбирает Белоснежка. По первому сигналу Белоснежки один гном съел яблоко, а каждый из остальных — манго. Какого наибольшего количества съеденных за одну минуту яблок сможет добиться Белоснежка?

3. Назовем натуральное число  $M$  *удивительным*, если выполнено следующее условие:

*при любом разбиении числа 9876543 в сумму двух натуральных слагаемых число  $M$  делится ровно на одно из этих слагаемых.*

Костя выписал по возрастанию первые 100 удивительных чисел. Найдите отношение сотого удивительного числа к первому.

4. Точка  $O$  выбрана внутри, а точка  $N$  — вне прямоугольника  $ABCD$  так, что отрезок  $ON$  пересекает сторону  $CD$ . Известно, что  $AO = ON$  и  $\angle ABO = \angle OCD = \angle NAD$ . Кроме того,  $\angle ANB = 50^\circ$ . Найдите  $\angle ABN$ .

5. Существует ли возрастающая последовательность натуральных чисел  $b_1, b_2, b_3, \dots$  такая, что при всех  $m, n > 1$

$$b_m b_n > b_{mn} > 0,999 b_m b_n?$$

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО; ДАТА РОЖДЕНИЯ; ТЕЛЕФОН; КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ; ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние. Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах [www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [olymp.academtalant.ru](http://olymp.academtalant.ru)