

10 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

Задача 1. Найдите все натуральные n такие, что $n + S(n) = 2025$, где $S(n)$ – сумма цифр числа n .

Решение: Если $n < 1000$, то $n + S(n) < 1000 + 9 \cdot 3 = 1027$. Значит n состоит из 4 цифр, пусть $n = 1000a + 100b + 10c + d$, где a, b, c, d – цифры, a не равно 0. Получаем уравнение: $1001a + 101b + 11c + 2d = 2025$.

Возможно 2 варианта $a = 1$ или $a = 2$.

В первом случае: $101b + 11c + 2d = 1024$, при $b < 9$ решений нет, при $b = 9$ получаем: $11c + 2d = 115$, чтобы $115 - 2d$ делились на 11 есть только 1 вариант $d = 8$. Получили решение 1998.

Во втором случае $101b + 11c + 2d = 23$, видим что $b = 0$, получаем $11c + 2d = 23$, единственное решение $c = 1, d = 6$. Получили решение 2016.

Ответ: 1998, 2016.

Критерии.

1 балл за каждый найденный ответ

5 баллов за доказательство, что других ответов нет

3 балла, если не рассмотрен случай, что 1 на первом месте

7 баллов за полное решение.

Задача 2. Найдите все действительные корни уравнения

$$(x - 2024)^4 + (x - 2025)^2 = 1$$

Решение. Обозначим $t = x - 2024$, тогда для t получим уравнение $t^4 + (t - 1)^2 - 1 = 0$. Разложим левую часть уравнения на множители: $(t - 1)(t - 1 + t^3 + t^2 + t + 1) = (t - 1)t(t^2 + t + 2) = 0$. Поскольку уравнение $t^2 + t + 2 = 0$ действительных корней не имеет, остается $t = 0$ или $t = 1$. Таким образом, $x = 2024$ или $x = 2025$.

Ответ. 2024, 2025.

Критерии.

1 балл – приведен верный ответ без обоснования;

4 балла – получено разложение на множители;

7 баллов –приведено полное решение.

Задача 3. После товарищеского матча по футболу две команды (каждая из которых состоит из 18 игроков, включая 2 вратарей и запасных игроков) решили поехать на озеро искупаться. Им предоставили два автобуса вместимостью 18 человек каждый. Игроки двух команд расселись в эти два автобуса случайным образом. Найти вероятность, что в каждом из автобусов есть хотя бы один вратарь.

Решение. Отрицания этого события – все вратари сидят в одном автобусе. Найдем число способов такой посадки. Первого вратаря можно посадить на любое из 36 мест, тогда второго на любое из 17 оставшихся мест в том же автобусе, третьего на любое из 16 мест, четвертого на любое из 15 мест, остальные 32 игрока могут рассаживаться произвольным образом – всего $32!$ вариантов. Общее число способов рассадки 36 игроков равно $36!$. Значит, искомая вероятность равна

$$P = 1 - \frac{36 * 17 * 16 * 15 * 32!}{36!} = 1 - \frac{17 * 16 * 15}{35 * 34 * 33} = 1 - \frac{8}{77} = \frac{69}{77}$$

Ответ. $\frac{69}{77}$

Критерии.

1 балл сформулировано отрицание этого события

1 балл – найдено общее количество рассадок всех игроков,

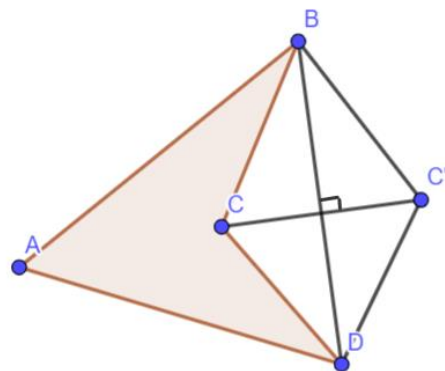
4 балла – найдено количество рассадок, при которых 4 вратаря сидят в одном автобусе,

7 баллов за полное решение

Задача 4. Для произвольного четырехугольника $ABCD$ докажите, что его площадь S удовлетворяет неравенству $4S \leq (AB + BC)(CD + DA)$.

Решение. Если четырехугольник невыпуклый, то можно отобразить вершину относительно внешней диагонали. При этом площадь увеличится, а длины сторон останутся теми же.

Поэтому утверждение достаточно доказать для выпуклых четырехугольников. Для него имеем первое неравенство



$2S = 2S_{ABD} + 2S_{BCD} = AB \cdot AD \sin A + CB \cdot CD \cdot \sin C \leq AB \cdot AD + CB \cdot CD$. Построим точку C' – образ точки C относительно серединного перпендикуляра к BD , тогда $BC' = CD, DC' = BC$. Получаем второе неравенство

$$2S = 2S_{ABC'D} = AB \cdot BC' \cdot \sin B + C'D \cdot DA \cdot \sin D \leq AB \cdot CD + CB \cdot DA.$$

Сложив неравенства, получим

$$4S \leq AB \cdot AD + CB \cdot CD + AB \cdot CD + CB \cdot DA = (AB + BC) \cdot (CD + DA)$$

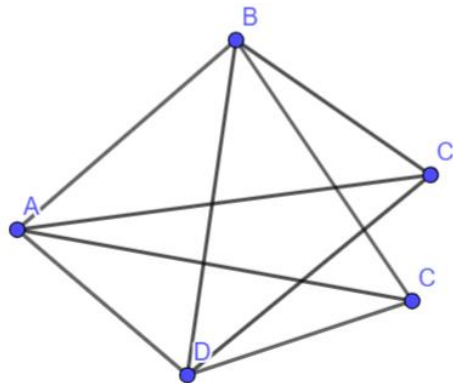
Критерии.

1 балла – задача сведена к выпуклым четырехугольникам,

2 балла – за первое неравенство о площадях,

4 балла – за второе неравенство о площадях,

7 баллов за полное решение.



Задача 5. На плоскости прямолинейно с постоянными (не обязательно равными) скоростями движутся три точки. В некоторый момент времени они не находились на одной прямой. Могут ли после этого все три точки выстроиться вдоль каких-либо прямых более двух раз?

Решение.

Обозначим эти точки A, B и C . Предположим, что точки A, B, C могут оказаться на одной прямой более 2 раз. Рассмотрим декартову систему координат с началом в подвижной точке A . В этой системе координат точки B и C движутся равномерно и прямолинейно. Уравнение траектории точки B : $\begin{cases} x_B = k_B t + l_B \\ y_B = m_B t + n_B \end{cases}$,

C : $\begin{cases} x_C = k_C t + l_C \\ y_C = m_C t + n_C \end{cases}$. Условие, что точки A, B и C окажутся на одной прямой :

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$, в координатной записи $\frac{x_B - 0}{y_B - 0} = \frac{x_C - 0}{y_C - 0}$.

То есть $\frac{k_B t + l_B}{m_B t + n_B} = \frac{k_C t + l_C}{m_C t + n_C}$. Это равенство представляет собой либо уравнение степени не больше двух либо выполнено тождественно. Поскольку в начальный момент времени A, B и C не находились на одной прямой, то второй вариант не реализуется. Значит, уравнение имеет не более двух корней.

Критерии.

- 1 балл - выписаны уравнения движения точек А, В и С;
- 2 балла – выбрана подвижная система координат и выписаны в этой системе уравнения движения двух точек;
- 3 балла – сформулировано условие, что три точки окажутся на одной прямой;
- 5 – задача сведена к анализу количества решений квадратного уравнения;
- 7 баллов за полное решение.

Задача 6. Последовательность $a_n, n \geq 0$ задана условиями $a_0 = 0, a_{n+1} = ka_n + \sqrt{(k^2 - 1)a_n^2 + 2025}, n \geq 0$, где k некоторое натуральное число. Доказать, что все члены последовательности целые, а члены с четными номерами делятся на $2k$.

Решение. Видим, что $a_{n+1} > ka_n > a_n$, следовательно последовательность монотонно возрастает. Возведем в квадрат равенство $a_{n+1} - ka_n = \sqrt{(k^2 - 1)a_n^2 + 2025}$, после упрощений получим

$$a_{n+1}^2 - 2ka_{n+1}a_n + a_n^2 - 2025 = 0,$$

в следующей точке имеет

$$a_{n+2}^2 - 2ka_{n+1}a_{n+2} + a_{n+1}^2 - 2025 = 0.$$

Вычтем из второго выражения первое, получим

$$\begin{aligned} & a_{n+2}^2 - a_n^2 - 2ka_{n+1}a_{n+2} + 2ka_{n+1}a_n = \\ & = (a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n - 2ka_{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

Так как a_n строго монотонно возрастающая, то $a_{n+2} - a_n > 0$ и следовательно

$$a_{n+2} = 2ka_{n+1} - a_n \quad (1)$$

Поскольку $a_0 = 0, a_1 = 45$ (найдено из исходного выражения), то в силу формулы (1) получим, что a_n - натуральные числа. Более того из формулы (1) следует, что $a_{n+2} + a_n : 2k$ и так как $a_0 = 0$, то и все четные члены будут кратны $2k$

4 балла за доказательство натуральности всех чисел,

3 балла – за доказательство делимости четных членов на $2k$,

-1 балл, если не сформулирована, но использована монотонность последовательности (например, поделили на $a_{n+2} - a_n$),

3 балла – получена формула (1),

7 баллов за полное решение.