Условия и решения задач
10 класс

1. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c = 6$. докажите, что верно неравенство:

$$2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geq 3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Доказательство. Перепишем неравенство следующим образом:

$$a^2+b^2+c^2+a+b+c+2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geq 9+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Теперь нам достаточно доказать, что для произвольного положительного числа x верно неравенство:

$$x^2+x+2\frac{1}{x^2} \geq 3+\frac{1}{x}.$$

Это неравенство переписывается следующим образом:

$$x^4+x^3-3x^2-x+2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)(x+2) \geq 0,$$

что и требовалось доказать.

2. Докажите, что среди произвольных десяти различных двузначных чисел можно выделить две разные группы чисел с одинаковой суммой.

Решение. Известно, что число подмножеств множества A, содержащего m элементов равно 2^m (включая пустое множество и само множество A). Поэтому существует $2^{10} - 2 > 1000$ способов выбрать группу чисел из заданных 10, которая содержит от 1 до 9 чисел. Сумма десяти двузначных чисел с одной стороны положительна, а с другой меньше, чем $10 \cdot 100 = 1000$. Таким образом, существует менее 1000 различных сумм, и поэтому будут найдены две разные группы чисел X и Y, сумма которых одинакова. Что и требовалось доказать.

3. Решите систему уравнений в натуральных числах:

$$\begin{cases} x^3-6y^2+27z=132, \\ y^3-9z^2+3x=125, \\ z^3-3x^2+12y=-68. \end{cases}$$

Решение. Сложим уравнения почленно и преобразуем левую часть:

$$(x^3-3x^2+3x)+(y^3-6y^2+12y)+(z^3-9z^2+27z)=189 \Leftrightarrow$$

$$(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (y^3 - 6y^2 + 12y - 8) + (z^3 - 9z^2 + 27z - 27) = 153 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^3+(y-2)^3+(z-3)^3=153$$

Далее простым перебором убеждаемся, что число 153 единственным образом представляется в виде суммы кубов трёх натуральных чисел: $1^3 + 3^3 + 5^3 = 153$. Таким образом, в последнем выражении значения $(x - 1)$, $(y - 2)$ и $(z - 3)$ следует выбирать из чисел 1, 3, 5. Опять перебором нетрудно убедиться, что решений не существует.

Ответ: решений не существует.

4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты BP и CQ, точка T – точка пересечения высот треугольника PAQ. Оказалось, что $\angle CTB = 90^o$. Найдите в градусах величину $\angle BAC$.

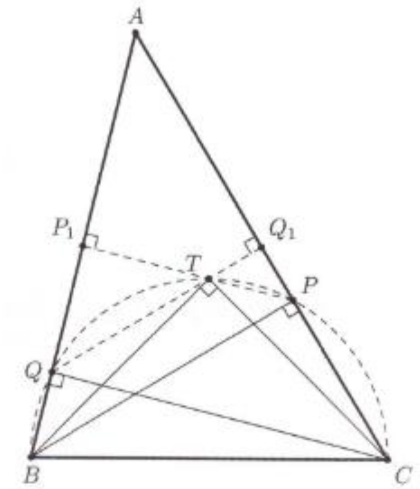
Решение. Из условия следует, что $\angle \mathbf{BQC} = \angle BTC = \angle BPC = 90^o$, следовательно, точки Q. T, P лежат на окружности с диаметром BC, причем именно в таком порядке: (см. рисунок), поскольку треугольник ABC остроугольный. Отсюда

$$\angle QTP = 180° - \angle ABP = 180° - (90° - \angle BAC) = 90° + \angle BAC$$

$$QT \perp AC,\ PT \perp AB,\ \angle QTP = 180° - \angle BAC.$$

С другой стороны $90° + \angle BAC = 180° - \angle BAC \Rightarrow \angle BAC = 45°.$

Ответ: 45^o.



5. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – квадратические функции. Известно, что

$$|f(1)| + |g(1)| + |f(2)| + |g(2)| = 0 \text{ и } \frac{f(3)}{g(3)} = 2024.$$

Найдите $\frac{f(2023)}{g(2023)}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = kx^2 + lx + m$, где a, k 6 $\neq$ 0. Из условия следует, что $f(1) = g(1) = f(2) = g(2) = 0$. Тогда легко получить, что $b = -3a$, $c = 2a$, $l = -3k$ и $m = 2k$. Значит, $f(x) = a(x^2 - 3x + 2)$, $g(x) = k(x2 - 3x + 2)$ и $\frac{f(2023)}{g(2023)} = \frac{a}{k} = 2024$.

Ответ: 2024.