Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2024/2025 учебный год

Решения задач и критерии оценивания. 10 класс

$\boxed{\textbf{10.1}}$ *На ЕГО (единая государственная олимпиада) за решение задачи части А участникам давали 2 балла, за решение задачи части Б – 4 балла, а за нерешенную задачу части А вычитали 2 балла. Один из участников решил 10 задач и получил в итоге 16 баллов. Сколько всего задач в части А?*

Решение: Обозначим через a количество задач части А, через b – количество решённых участником задач части Б, а через n – количество нерешённых задач части А. Тогда по условию можно составить два равенства: $b + (a - n) = 10$ и $4b + 2(a - n) - 2n = 16$. Умножим первое равенство на 4 и вычтем из него второе. Получится $2a = 24$, откуда получаем ответ к задаче — 12.

Критерии:

- Правильно составленные уравнения, но решение не доведено до конца — 4 балла;
- Полное решение — 7 баллов.

$\boxed{\textbf{10.2}}$ *Пусть a – корень уравнения $x^3 - 20x - 24 = 0$. Найдите уравнение третьей степени с целыми коэффициентами такое, чтобы его корнем было число a^2.*

Решение: Приведём один из способов получения искомого уравнения. По условию $a^3-20a-24 = 0$, поэтому $a(a^2 - 20) = 24$. Возведём это равенство в квадрат и получим $a^2(a^2 - 20)^2 = 24^2$, поэтому a^2 – это корень уравнения третьей степени с целыми коэффициентами

$$x(x - 20)^2 - 24^2 = 0.$$

Или, после раскрытия скобок, $x^3 - 40x^2 + 400x - 576 = 0$.

Замечание. Ответ в задаче однозначен с точностью до числового множителя.

Критерии:

- Ответ записан в виде полиномиального выражения без раскрытия скобок — баллы не снимать;
- Получено уравнение не третьей степени — 0 баллов;
- Получено уравнение, коэффициенты которого являются некоторыми выражениями, целочисленность которых не доказана — 0 баллов.

$\boxed{\textbf{10.3}}$ *Докажите неравенство для всех $x > 0$:*

$$\frac{1}{x + x^2} + \frac{x}{1 + x^2} + \frac{x^2}{1 + x} > 1.$$

Решение: Так как $x > 0$, то добавив к каждому знаменателю такое слагаемое, чтобы он стал равным $1 + x + x^2$, мы только уменьшим всю сумму дробей. Но после такой добавки она станет в точности равна 1:

$$\frac{1}{x + x^2} + \frac{x}{1 + x^2} + \frac{x^2}{1 + x} > \frac{1}{1 + x + x^2} + \frac{x}{1 + x + x^2} + \frac{x^2}{1 + x + x^2} = 1.$$

Замечание. Возможны и другие решения, например, через приведение к одному знаменателю.

Критерии:

- В ходе решения получено нестрогое неравенство $\geqslant 1$ вместо строгого — не более 6 баллов;
- Использованы классические неравенства без доказательства (неравенство о средних, неравенство Коши-Буняковского, неравенство Йенсена и т.д.) — баллы не снимать.

$\boxed{10.4}$ *Из девяти отрезков с длинами 8, 9, 10, ..., 16 составили 3 треугольника, использовав каждый отрезок ровно один раз. Докажите, что среди них обязательно есть остроугольный.*

Решение: Предположим противное, что ни одного остроугольного треугольника не получилось. По теореме косинусов треугольник будет остроугольным тогда и только тогда, когда квадрат наибольшей стороны меньше суммы квадратов двух других сторон. Значит в наших треугольниках получилось наоборот. Обозначим через $a_1 < a_2 < a_3$, $b_1 < b_2 < b_3$ и $c_1 < c_2 < c_3$ стороны этих треугольников. Тогда $a_1^2 + a_2^2 \leqslant a_3^2$, $b_1^2 + b_2^2 \leqslant b_3^2$, $c_1^2 + c_2^2 \leqslant c_3^2$. Сложим все три неравенства и получим, что сумма квадратов меньших сторон всех треугольников не больше суммы квадратов наибольших сторон. Но сумма квадратов наибольших сторон $a_3^2 + b_3^2 + c_3^2$ не больше, чем сумма квадратов наибольших отрезков $14^2 + 15^2 + 16^2 = 677$, а сумма квадратов меньших сторон не может быть меньше, чем сумма квадратов шести наименьших отрезков из набора $8^2 + 9^2 + \cdots + 13^2 = 679$. Однако, $679 > 677$ — противоречие.

Критерии:

- Использован критерий остроугольности треугольника без доказательства — баллы не снимать.

$\boxed{10.5}$ *Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ разрезали на четыре меньших с помощью разрезов вдоль отрезков, соединяющих середины противоположных сторон. Оказалось, что совпадают площади четырехугольничков с вершинами A и C, а также равны площади четырехугольничков с вершинами B и D. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.*

Решение: Обозначим середины сторон AB, BC, CD и DA через M_1, M_2, M_3 и M_4. Заметим, что отрезок M_1M_2 – средняя линия треугольника ABC, поэтому он равен половине AC и параллелен ему. Тоже самое можно сказать и про M_3M_4 в $\triangle CDA$. Значит в четырёхугольнике $M_1M_2M_3M_4$ равны и параллельны противоположные стороны, поэтому это параллелограмм. Пусть O – его центр. Тогда, $S_{M_1M_2O} = S_{M_3M_4O}$, а так как по условию $S_{M_1BM_2O} = S_{M_3DM_4O}$, то получаем $S_{M_1BM_2} = S_{M_3DM_4}$, но $S_{M_1BM_2} = \dfrac{1}{4}S_{ABC}$ и $S_{M_3DM_4} = \dfrac{1}{4}S_{CDA}$, потому что M_1M_2 и M_3M_4 – средние линии соответствующих треугольников. Значит, $S_{ABC} = S_{CDA}$. В этом равенстве стоят два треугольника с общим основанием AC, значит высоты из B и D на AC равны, а поэтому диагональ BD делится точкой пересечения с диагональю AC пополам. Аналогично, диагональ AC делится точкой пересечения с диагональю BD пополам. Эти два факт и есть необходимое и достаточное условие, чтобы четырёхугольник $ABCD$ был параллелограммом.

Критерии:

- Используется без доказательства факт, что $M_1M_2M_3M_4$ параллелограмм (теорема Вариньона) — баллы не снимать;
- Используется без доказательства факт, что отрезок с концами равноудалёнными от прямой делится этой прямой пополам — баллы не снимать.