ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ.
2024-2025 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

10 КЛАСС

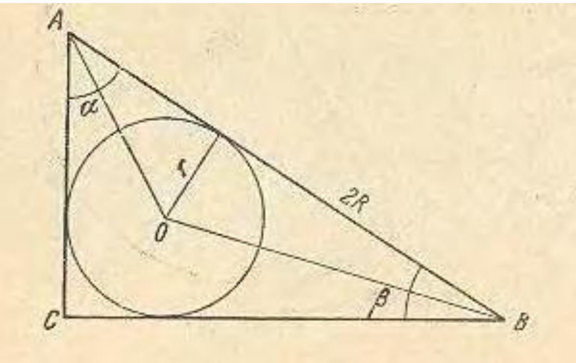
Задачи для математической олимпиады (10 класс).
Условия, решения и критерии проверки.

1. Доказать, что $3^{2n+3} + 40n - 27$ делится на **64** для любого целого положительного n.

Решение. Положим $T_n = 3^{2n+3} + 40n - 27$. Тогда $T_0 = 3^3 - 27 = 0$ делится на **64.**
Предположим, что при некотором $k \in \mathbf{N}$ T_k делится на **64.** Тогда
$T_{k+1} = 3^{2k+5} + 40k + 40 - 27 = 3^{2k+5} + 40k + 13 =$
$= 3^2(3^{2k+3} + 40n - 27) - 9 \cdot 40k + 9 \cdot 27 + 40k + 13 = 9T_k - 320k + 256 = 9T_k - 64(5k - 4)$ делится на **64.**
В силу метода математической индукции $3^{2n+1} + 40n - 27$ делится на **64.**

Критерии проверки.
Задача правильно решена - 7 баллов.
При правильных рассуждениях решение выполнено с арифметической ошибкой - 5 баллов.
Проведена только проверка, что T_0 (и, может быть, T_1) делится на 64 - 3 балла.
Решение отсутствует - 0 баллов

2. Найти острые углы прямоугольного треугольника, если радиус описанной вокруг него окружности относится к радиусу вписанной в него окружности как **m:n, m,n ϵ N**, $m > n(1 + \sqrt{2})$.



Решение. Пусть ΔABC заданный треугольник. Обозначим через **R** и r радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно. Тогда **(**см. чертёж**)**
$AB = 2R$. С другой стороны,

$$AB = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{2R}{r} = \frac{2m}{n}. \quad (3)$$

Так как ΔABC прямоугольный, то $\alpha/2+\beta/2=\pi/4$. Тогда по формуле для котангенса суммы двух углов находим, что

$$1=\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}-1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}\ (4)$$

Из равенства (4) получаем

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+1=\frac{2m}{n}+1.$$

Следовательно, оба числа **ctg α/2 и ctg β/2** по теореме Виета являются корнями

квадратного уравнения **x^2-(2m/n)x+(2m/n+1)=0**, где

$$x_{1,2}=\frac{\frac{2m}{n}\pm\sqrt{\frac{4m^2}{n^2}-4(\frac{2m}{n}+1)}}{2}=\frac{\frac{2m}{n}\pm\sqrt{(\frac{2m}{n}-2)^2-8}}{2}=$$

$$=\frac{\frac{2m}{n}\pm\frac{2}{n}\sqrt{(m-n)^2-2n^2}}{2}=\frac{m\pm\sqrt{m^2-2mn-n^2}}{n}\ .\ (5)$$

Преобразуем дискриминант уравнения :

$$D=m^2-2mn-n^2=n^2\left(\frac{m^2}{n^2}-2\frac{m}{n}-1\right)=$$

$$=n^2\left(\left(\frac{m}{n}-1\right)^2-2\right)=n^2\left(\frac{m}{n}-1-\sqrt{2}\right)\left(\frac{m}{n}-1+\sqrt{2}\right)\ .$$

Так как число **m/n** положительное и рациональное, то ***D* ≠ 0,** следовательно, выясним когда ***D* > 0.** С помощью метода интервалов устанавливаем, что дискриминант положителен, если **m/n ∈ (1 + √ 2, +∞).** По условию задачи,как раз**,m/n >1+√ 2.**

Из равенства **(5)** тогда вытекает, что оба корня уравнения положительные. Таким образом, получаем следующие значения котангенсов:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{m+\sqrt{m^2-2mn-n^2}}{n},\ \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{m-\sqrt{m^2-2mn-n^2}}{n}$$

Поскольку **{α/2, β/2} ⊂[0, π/4]**, то окончательно получаем

Ответ.

$$\alpha=2\operatorname{arcctg}\left(\frac{m+\sqrt{m^2-2mn-n^2}}{n}\right),\ \beta=2\operatorname{arcctg}\left(\frac{m-\sqrt{m^2-2mn-n^2}}{n}\right).$$

Критерии проверки.

Задача правильно решена - 7 баллов.

При правильных рассуждениях решение выполнено с арифметической ошибкой - 5 баллов.

Решение правильно доведено до квадратного уравнения, найдены корни, но нет проверки, что все корни положительны - 3 балла.

В решении правильно найдена только сумма котангенсов половинных углов - 1 балл.

Решение отсутствует - 0 баллов

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+xz-x=2 \\ y^2+xy+yz-y=4 \\ z^2+xz+yz-z=6. \end{cases}$$

Решение. Вначале сложим все уравнения:

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz-x-y-z=12$$

или

$$(x+y+z)^2-(x+y+z)-12=0.$$

Положим $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x+y+z}$ и решаем уравнение $\boldsymbol{t^2-t-12=0}$. Корни уравнения $\boldsymbol{t_1=-3}$, $\boldsymbol{t_2=4}$.

Так как $\boldsymbol{y+z=t-x}$, то подставляя это равенство в первое уравнение, получим:

$$x^2+x(t-x)-x=2 \;\Rightarrow\; x(t-1)=2 \;\Rightarrow\; x=\frac{2}{t-1}. \quad \mathbf{(6)}$$

Аналогично, из равенств $\boldsymbol{x+z=t-y}$ и $\boldsymbol{x+y=t-z}$ и подстановки их во второе и третье уравнения соответственно получаем, что

$$y=\frac{4}{t-1},\quad z=\frac{6}{t-1}. \quad \mathbf{(7)}$$

Подставляя найденные значения $\boldsymbol{t}$ в равенства **(6)** и **(7),** находим все решения системы

Ответ.

$$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2} \\ y_1=-1 \\ z_1=-\frac{3}{2}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=\frac{2}{3} \\ y_2=\frac{4}{3} \\ z_2=2. \end{cases}$$

Критерии проверки.

Система правильно решена - 7 баллов.

При правильных рассуждениях решение выполнено с арифметической ошибкой - 5 баллов.

Правильно найдены значения суммы x+y+z - 3 балла.

Решение отсутствует - 0 баллов

4.При каких действительных значениях $\boldsymbol{x}$ и α справедливо неравенство

$$\log_2 x+\log_x 2+2\cos\alpha\le 0?$$

Решение. Сразу отметим, что, если число $\boldsymbol{x}$ удовлетворяет данному неравенству, то $\boldsymbol{x \in (0,1)\cup(1,+\infty)}$. Сделаем замену

$$\log_2 x=y \;\Rightarrow\; y+\frac{1}{y}+2\cos\alpha\le 0 \;(6)$$

Число $\boldsymbol{z=y+1/y}$ одного знака с числом $\boldsymbol{y}$.

Рассмотрим **2** возможных случая.

а**)** $\boldsymbol{z>0}$**.** Так как $\boldsymbol{z=y+1/y\ge 2}$ для любого $\boldsymbol{y>0}$, то

$$2 \le y + \frac{1}{y} \le -2\cos\alpha \;\Rightarrow\; 2 \le -2\cos\alpha,$$

что возможно только при **cos** α **= −1.** Следовательно, неравенство **(6)** принимает вид

$$2 \le y + \frac{1}{y} \le 2 \;\Rightarrow y + \frac{1}{y} = 2 \;\Rightarrow\; y = 1 \;\Rightarrow\; x = 2.$$

кроме того, из **cos** α **= −1** следует, что $\alpha = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
Таким образом, при **z** > **0** данное неравенство справедливо при $x = 2$ и $\alpha = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
б) **z** < **0.** Тогда

$$z = y + \frac{1}{y} = -\left(-y + \frac{1}{-y}\right) \le -2 \;\Rightarrow\; y + \frac{1}{y} \le -2\cos\alpha$$

при всех действительных α.
Решая неравенство

$$y + \frac{1}{y} \le -2,$$

Получаем

$$\frac{y^2+1}{y} + 2 \le 0 \;\Rightarrow\; \frac{(y+1)^2}{y} \le 0 \;\Rightarrow\; \log_2 x = y \in (-\infty, 0) \;\Rightarrow\; x \in (0,1).$$

Таким образом, если **z** < **0,** то неравенство выполняется для любого α и всех $x \in (0, 1)$.
Объединяя полученное, приходим к следующему выводу

Ответ. Данное неравенство справедливо для любого действительного α и любых $x \in (0, 1) \cup \{2\}$.
Критерии проверки.
Система правильно решена - 7 баллов.
При правильных рассуждениях в ответе потеряны значения α или (и) x=2.
- 6 баллов.
Правильно рассмотрен только один из случаев - z>0 или z<0 - 5 баллов.
В правильно рассмотренном (только в одном)z>0 или z<0
допущена арифметическая ошибка - 3 балла.
При правильных рассуждениях в каждом из упомянутых случаях допущены арифметические ошибки - 1 балл.
Решение отсутствует - 0 баллов.

5. Даны $n \ge 5$ натуральных чисел, составляющих возрастающую арифметическую прогрессию.
а) может ли сумма всех этих чисел быть равной **30 ?**
б) каково наибольшее значение *n*, если сумма всех этих чисел меньше **2024 ?**
в) найти все возможные значения ***n*,** если сумма всех этих чисел равна **144.**
Решение. а) да, может, например, сумма чисел **4, 5, 6, 7, 8** равна **30.**
б) пусть a_1 - первый элемент прогрессии, ***d*** - её разность. По условию

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n < 2024, \;\; a_1 \ge 1, \;\; d \ge 1$$

Выбирая наименьшие значения **a_1** и ***d*,** приходим к неравенству

$$\frac{n(n+1)}{2} < 2024 \;\Leftrightarrow\; n^2 + n - 4048 < 0.$$

Данному неравенству удовлетворяют все натуральные числа **$n \leq 63$.** Отсюда, при **$n = 63$, $a_1 = d = 1$** получаем:

$$S_{63} = \frac{2+62}{2} \cdot 63 = 32 \cdot 63 = 2016 < 2024.$$

в) если сумма равна **144,** то из равенства

$$\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = 144$$

заключаем, что

$$(2a_1 + (n-1)d)n = 288 = 2^5 \cdot 3^2.$$

Так как **$a_1 \geq 1$, $d \geq 1$,** то из неравенства

$$(n+1)n \leq 288 \;\Leftrightarrow\; n^2 + n - 288 \leq 0$$

следует, что **$n \leq 16$.** таким образом**, $5 \leq n \leq 16$** и, при этом, число ***n*** делит **288.** Следовательно**, $n = 6; 8; 9; 12; 16$.**

Рассмотрим подробно каждый из указанных значений **n.**

Пусть **$n = 6$.** Тогда **$2a_1 + 5d = 48$,** подходит, например, набор чисел

4; 12; 20; 28; 36; 44.

При **$n = 8$** получаем **$2a_1 + 7d = 36$** и, например, набор чисел

4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32.

$n = 9 \Rightarrow a_1 + 4d = 16 \Rightarrow$ 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20.

$n = 12 \Rightarrow 2a_1 + 11d = 24 \Rightarrow$ 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23.

$n = 16 \Rightarrow 2a_1 + 15d = 18 \Rightarrow d$ − чётное число. Отсюда уравнение

$2a_1 + 15d = 18$ не имеет натуральных решений, т.к. **$15d > 18$.**

Ответ. а) да, может; б) **$n = 63$;** в) **$n = 6; 8; 9; 12$.**

Критерии проверки.

Правильно решены все три части задачи - 7 баллов.

Правильно решены части а),б), а в части в) не указано, что значение n=16 не подходит - 6 баллов.

Правильно решены части а),б), а в части в) решение доведено только до значений n= 6; 8; 9; 12; 16 - 5 баллов.

Правильно решены только части а) и б) - 4 балла.

Правильно решена часть а) и в решении части б) проведены правильные рассуждения, но с арифметической ошибкой - 2 балла.

Правильно решена только часть а) - 1 балл.

Решение отсутствует - 0 баллов.