

10 класс

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в комментариях к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

10.1. Верно ли, что существует не менее 2024 различных натуральных чисел n , для каждого из которых значение выражения $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ является натуральным числом?

Ответ: да

Решение. Так как $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}} = \sqrt{n\sqrt{n^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{n^{\frac{7}{4}}} = n^{\frac{7}{8}}$, то значение выражения

$\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ является натуральным числом при $n = k^{8m}$, где k и m – произвольные натуральные числа.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов.

10.2. Пусть a и b - положительные числа и $p = 1 + a/b$, $q = 1 + b/a$, $p^2 + q^2 = 15$.
Найдите значение выражения $p^4 + q^4$.

Ответ: 175

Решение. $(p - 1)(q - 1) = 1 \rightarrow pq = p + q = r$; $p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq = r^2 - 2r = 15$
 $\rightarrow r = 5 \rightarrow$

$$p^4 + q^4 = (p^2 + q^2)^2 - 2(pq)^2 = 15^2 - 2r^2 = 225 - 50 = 175.$$

Замечание. Возможны различные способы составления уравнений для нахождения p или q .

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Составлено уравнение для нахождения p или q – 1 балл. Только верный ответ с верным примером ($a = (3 + \sqrt{5})/2$, $b = (3 - \sqrt{5})/2$ или наоборот) – 1 балл.

Найдено решение уравнения без дальнейшего продвижения – 3 балла.

10.3. Докажите, что для любого натурального числа n число $k = (18^{4n+2} + 1)/325$ является составным натуральным числом.

Решение. $k = (18^{4n+2} + 1)/325 = (18^{2(2n+1)} + 1)/(18^2 + 1) = 18^{2 \cdot 2n} - 18^{2 \cdot (2n-1)} + 18^{2 \cdot (2n-2)} - \dots + 1$.

С другой стороны, $18^{4n+2} + 1 = (18^{2n+1} + 1)^2 - (6 \cdot 18^n)^2 = (18^{2n+1} + 1 + 6 \cdot 18^n) \cdot (18^{2n+1} + 1 - 6 \cdot 18^n)$, причём $18^{2n+1} + 1 - 6 \cdot 18^n \geq 18^{n+3} + 1 - 6 \cdot 18^n = (18^3 - 6) \cdot 18^1 + 1 > 325$.

Поэтому $k = (18^{4n+2} + 1)/325$ является составным натуральным числом.

Комментарии. Доказано, что число $k = (18^{4n+2} + 1)/325$ является натуральным числом – 1 балл.

Получено разложение с помощью выделения полного квадрата – 2 балла. И то, и другое – 3 балла.

10.4. Игроки А и Б играют в следующую игру. Сначала игрок А расставляет в определённом порядке восемь карточек, на которых сверху записаны числа 2, 0, 1, 7, 1, 8, 2, 4. Затем игроки по очереди, начиная с игрока Б, забирают себе одну из крайних карточек. Выигрывает тот игрок, на карточках которого сумма чисел больше. Кто из игроков выигрывает при правильной игре? (под *правильной* игрой понимаются такие действия игроков, когда каждый действует наилучшим для себя образом, пытаясь выиграть) Опишите выигрышную стратегию этого игрока.

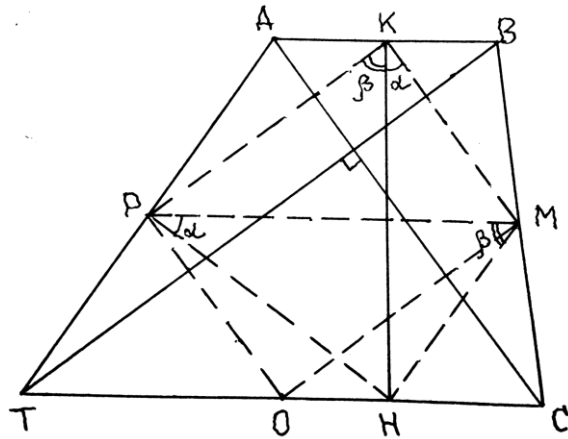
Ответ: при правильной стратегии выигрывает игрок Б.

Решение. При любой расстановке карточек на чётных местах или нечётных местах находятся карточки с большей суммой чисел (так как сумма всех чисел нечётная). Если большей будет сумма чисел на нечёт-ных местах, то игрок Б своим первым ходом забирает первую карточку, а если большей будет сумма чисел на чётных местах, то игрок Б своим первым ходом забирает последнюю карточку. Своими следу-ющими ходами игрок Б забирает карточку с того края, с которого перед этим взял карточку игрок А. При этом игрок Б соберёт все карточки с номерами той одной чётности, сумма записанных на которых чисел больше.

Комментарии.

Только верная стратегия, без доказательства того, что она является выигрышной – 3 балла.

10.5. Диагонали трапеции $ABCT$ перпендикулярны. Точки K, M, O, P – середины сторон AB, BC, CT, TA соответственно. На основании CT нашлась точка H , отличная от точки O , для которой угол MHP – прямой. Докажите, что угол BKH – прямой.



Решение. Так как PK и OM – средние линии треугольников TAB и TCB соответственно, KM и OP – средние линии треугольников ABC и ATC соответственно, а AC и TB перпендикулярны, то $PKMO$ – прямоугольник, вписанный в окружность с диаметрами PM и OK . На этой же окружности находится точка H . В вписанном в окружность с диаметром OK четырехугольнике $OPKH$ $\angle OHK = 90^\circ$, а, значит, и $\angle BKH = 90^\circ$.

Комментарии. Доказано, что $PKMO$ – прямоугольник, вписанный в окружность с диаметрами PM и OK – 3 балла.