

**Решения заданий муниципального этапа
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2024-2025 учебный год, 10 КЛАСС**

Максимальное количество 35 баллов

10.1. На олимпиаде по математике все знакомые участники пожали друг другу руки. Какое наименьшее количество участников должно было прийти, если известно, что рукопожатий было 24?

Ответ: 8.

Решение:

Допустим, все пожали друг другу руки, тогда рукопожатий должно быть не меньше, чем $\frac{n(n-1)}{2} \geq 24$, где n – количество участников.

$$n^2 - n - 48 \geq 0$$

$D = 1 + 192 = 193$, ближайший точный квадрат 225, откуда $n \geq \frac{1+15}{2} = 8$.

Критерии	баллы
1. Полное решение задачи	7
2. Найден верный ответ, проведён расчёт рукопожатий, но не объяснено почему меньше быть не может.	3
3. Ответ без расчёта рукопожатий.	0
4. Неверное решение.	0

10.2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{xyz}{x+y} = 2 \\ \frac{xyz}{y+z} = 1,2 \\ \frac{xyz}{z+x} = 1,5 \end{cases}$$

Ответ: (1; 2; 3) и (-1; -2; -3).

Решение:

Поменяем местами числители и знаменатели всех частей уравнений.

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xyz} = \frac{1}{2} \\ \frac{y+z}{xyz} = \frac{5}{6} \\ \frac{z+x}{xyz} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ Сделаем замены: } \frac{1}{yz} = k, \frac{1}{xz} = p, \frac{1}{xy} = t.$$

$$\begin{cases} k + p = \frac{1}{2} \\ p + t = \frac{5}{6} \\ t + k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Сложив уравнения между собой, получим: $2(k + p + t) = 2$, значит $k + p + t = 1$.

$$(k + p + t) - (k + p) = t = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ по аналогии получаем } k = \frac{1}{6}, p = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{cases} xy = 2 \\ xz = 3 \\ yz = 6 \end{cases} \text{ Перемножив, получим: } (xyz)^2 = 36, \text{ значит } xyz = \pm 6.$$

Далее находим две тройки чисел.

Критерии	баллы
1. Полное решение задачи.	7
2. Ход решения верный, потеряны отрицательные корни.	5
3. Рассмотрена идея с заменой числителей и знаменателей между собой.	2
4. Неверное решение.	0

9.3. Задача на уроке математики звучала так: «Придумайте какие-нибудь четыре разных натуральных числа, среднее арифметическое которых равно второму по величине числу». Ученик записал, в тетради следующее: 1, x , y , 100. Сколько чисел ему можно взять вместо y так, чтобы задача имела решение для x , а числа были записаны в порядке возрастания?

Ответ: 16 чисел.

Решение:

x – второе по величине, значит $x < y$.

$$\frac{1+x+y+100}{4} = x, \text{ откуда } x = \frac{y+101}{3}.$$

1) $\frac{y+101}{3} > y \Rightarrow y > 50,5$

2) $\frac{y+101}{3} < 100 \Rightarrow y < 199$ (ограничений не даёт)

3) $y = 3x - 101 = 3(x - 34) + 1$, даёт остаток 1 при делении на 3.

Таким образом, осталось посчитать количество чисел от 51 до 99,

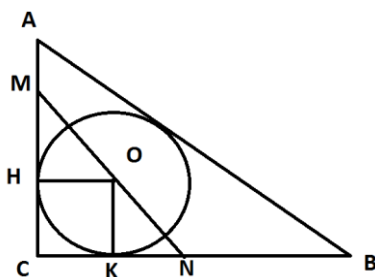
которые дают остаток 1 при делении на 3. Таких чисел $\frac{99-51}{3} = 16$.

Критерии	баллы
1. Полное решение задачи.	7
2. Найдены все числа и показано, что других нет. Участник выписывает все числа, но не указывает их количество	6
3. В решении присутствуют все три оценки, но неверно сделан подсчёт чисел.	4
4. Выписаны все числа, но не объяснено, почему других не найдётся.	2
5. В решении присутствует хотя бы одна оценка.	1
6. Неверное решение.	0

10.4. Через центр вписанной в прямоугольный треугольник ABC окружности с радиусом $\sqrt{2}$ см проведена прямая, пересекающая катеты AC и BC в точках M и N . Найдите наименьшее возможное значение площади $\triangle MNC$.

Ответ: 4 см².

Решение:



Проведём радиусы $ОН$ и $ОК$ вписанной окружности сторонам $АС$ и $ВС$ соответственно. Получим квадрат $СНОК$ со стороной $\sqrt{2}$.

Треугольники $НМО$ и $КОН$ подобны ($\angle МНО = \angle ОКН = 90^\circ$; $\angle ONK = \angle MOH$ – накрестлежащие при $ОН \parallel НК$). Получаем соотношение $\frac{МН}{НО} = \frac{ОК}{КН}$. Обозначив $МН = x$, получаем $\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{КН}$, откуда $КН = \frac{2}{x}$.

$$S_{CMN} = S_{MON} + S_{CHOK} + S_{KON} = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{2} + 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) + 2$$

Задача свелась к минимизации выражения $\left(x + \frac{2}{x} \right)$.

$\left(x + \frac{2}{x} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{x} \right) \geq 2\sqrt{2}$ (сумма двух обратных чисел всегда не меньше 2). Это значение достигается при $x = \sqrt{2}$.

$$\text{Получаем } S_{CMN} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2} + 2 = 4.$$

Критерии	баллы
1. Полное решение задачи.	7
2. Верный ход решения, допущены ошибки в вычислениях повлиявшие на ответ.	5
3. Задача свелась к минимизации выражения $\left(x + \frac{2}{x} \right)$.	4
4. Сделаны дополнительные построения радиусов, показано, что $СНОК$ – квадрат. Доказано подобие треугольников $НМО$ и $КОН$.	2
5. Сделаны дополнительные построения радиусов, показано, что $СНОК$ – квадрат.	1
6. Неверное решение.	0

10.5. В наборе отрезков, каждый следующий - в 2 раза больше предыдущего. Можно ли из такого набора составить выпуклый многоугольник?

Ответ: Нет, нельзя.

Решение:

Пусть наименьший отрезок длины – x , тогда остальные: $2x, 2^2x, 2^3x, \dots, 2^{n-1}x$.

Сумма всех отрезков, кроме наибольшего, $x + 2x + \dots + 2^{n-1}x = x(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2})$.

Пользуясь формулой геометрической прогрессии, получим $x \cdot \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = x(2^{n-1} - 1)$, что очевидно меньше, чем $x \cdot 2^{n-1}$.

В таком наборе самый большой отрезок больше суммы всех остальных отрезков, значит многоугольник сложить не получится.

Критерии	баллы
1. Полное решение задачи.	7
2. Заявлено, что наибольший отрезок больше суммы остальных на длину наименьшего, без формального обоснования.	4
3. Замечено, что самый большой отрезок больше суммы всех остальных отрезков.	2
4. Неверное решение.	0