

**Муниципальный этап
всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2024-2025 учебном году
в Кемеровской области – Кузбассе**

Теоретический тур

10 класс

Решения задач, критерии оценивания

1. В пещере Кощея Бессмертного лежит кучка монет. Иван с Кощеем по очереди берут из кучи одну или две монеты. Проигравшим считается тот, кто заберет последнюю монету, Иван ходит первым. При каком изначальном количестве монет Иван сможет выиграть Кощея?

Решение. Опишем выигрышную стратегию Ивана. Чтобы выиграть, нужно, чтобы после каждого хода Ивана оставалось число монет, дающее остаток 1 при делении на 3, то есть $3k+1$ монет, $k=0,1,2,\dots$

Если изначально число монет $n = 3k$ или $n = 3k+2$, $k=1,2,\dots$, то первым ходом Иван берет 2 или 1 монеты, соответственно. Далее, если Кощей берет m монет, то Иван берет $3-m$ монет. То есть после хода Ивана количество монет уменьшается на 3. После последнего хода Ивана останется 1 монета, и он выигрывает. Если $n=2$, то Иван берет 1 монету и выигрывает.

Если изначально число монет $n = 3k+1$, $k=0,1,2,\dots$, то Иван не сможет выиграть, так как три монеты брать не разрешается, описанной выигрышной стратегией может воспользоваться Кощей.

Ответ: число монет $n=3k$ или $n=3k-1$, $k=1,2,\dots$

Указания. Верное решение с описанием выигрышной стратегии – 7 баллов. Только ответ, без стратегии - 1 балл. Только одно из двух значений n с указанием стратегии - 3 балла. Частные случаи значений n - 0 баллов.

2. В тридесятom царстве на интеллектуальном турнире три рыцаря: красный, синий и золотой решали задачи в течении определённого времени. За каждую решённую задачу рыцарь, решивший её первой, получал четыре алых платка от Елены Прекрасной, решивший второй — два платка, а решивший последним — один платок. Каждый рыцарь решил все задачи в срок, при этом одновременных решений не было. Красный и синий рыцари получили по 13 платков, а золотой рыцарь получил меньшее число платков. Сколько платков получил золотой рыцарь?

Решение. Пусть число всех задач равно N , а число платков у золотого рыцаря равно X . За каждую решённую задачу отдавалось $4+2+1=7$ платков, поэтому роздано было $7N$ платков. Получаем $7N=13+13+X=26+X \geq 28$. Если $7N=28$, то $X=2$; если $7N=35$, то $X=9$; если $7N \geq 42$, то $X \geq 16$, что не возможно.

1) Пусть $7N=28$, тогда $N=4$ и $X \geq 4$, а $X=2$ - противоречие.

2) Пусть $7N=35$, тогда $N=5$.

Пусть количества решённых задач первым (первым из троих рыцарей), вторым и третьим для каждого рыцаря следующие: красный $K=(k_1, k_2, k_3)$; синий $S=(s_1, s_2, s_3)$; золотой $Z=(z_1, z_2, z_3)$. Тогда возможно только $K=(2, 2, 1)$, $S=(2, 2, 1)$, $Z=(1, 1, 3)$, $X=4s_1+2s_2+s_3=4+2+3=9$ платков.

Ответ: 9 платков.

Указания. Верное решение с доказательством, что других решений нет, и такое значение платков достигается (возможно полным перебором) – 7 баллов. Только ответ, без доказательства - 1 балл.

3. Большой отрезок длины 100 покрыт полностью маленькими отрезками длины 1, лежащими в нем целиком, так, что при удалении любого маленького отрезка исходный большой отрезок остается не полностью покрытым. Какое наибольшее количество маленьких отрезков могут покрывать большой отрезок.

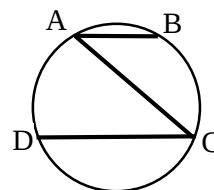
Решение. Оценка. Занумеруем маленькие отрезки натуральными числами от 1 до n в порядке расположения от начала большого отрезка. Если k -й и $k+2$ -й отрезки пересекаются (хотя бы по одной точке), то $k+1$ -й отрезок можно исключить. Следовательно, отрезки с различными нечетными номерами, не пересекаются. На большом отрезке длины 100 нельзя расположить больше 99 непересекающихся отрезков длины 1. Если бы маленьких отрезков было хотя бы 199, то отрезков с нечетными номерами было бы не менее 100. Значит, отрезков не больше 198.

Пример. Расположим 198 отрезков следующим образом: положение центров отрезков образуют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 0,5, а 198-й равен $99,5 = 0,5 + 197 \cdot d$, тогда разность этой прогрессии равна $d = 99/197 \approx 0,5025$. Расстояние между центрами k -го и $k+2$ -го отрезков равно $(99+99)/197 = 198/197 > 1$. Значит, между этими отрезками имеется зазор длиной $1/197$. Его перекрывает только $k+1$ -й отрезок. Поэтому никакой отрезок нельзя убрать.

Ответ: 198.

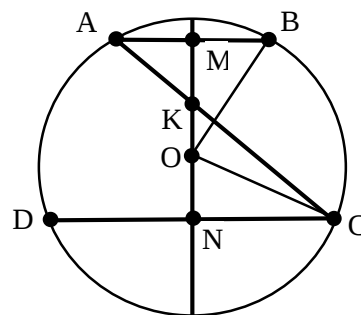
Указания. Верное решение – 7 баллов. Только ответ - 0 баллов. Доказана оценка - 4 балла, приведен правильный пример - 3 балла.

4. В окружности по разные стороны от центра проведены две параллельные хорды AB и CD с длинами 2 и 4 см, соответственно, а также хорда AC длиной 5 см (см. рисунок). Найти радиус окружности.



Решение. Проведем срединный перпендикуляр к параллельным хордам AB и CD , точки пересечения его с хордами AB , AC , CD - M , K , N , соответственно. И где-то на нем находится центр окружности O .

Рассмотрим прямоугольные треугольники AMK и CNK , они подобны по трем углам. Значит, $AM/CN = 1/2 = AK/CK$. Так как весь отрезок $AC = 5$ см, то $AK = 5/3$ см, $CK = 10/3$ см. В этих треугольниках по т.



Пифагора $MK^2 = 25/9 - 1 = 16/9$, $MK = 4/3$; $NK^2 = 100/9 - 4 = 64/9$, $NK = 8/3$.
Тогда $MN = 4/3 + 8/3 = 4$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники OCN и OBM . Их гипотенузы OB и OC – это радиусы R окружности. Пусть $ON = x$, тогда $OM = 4-x$. По т. Пифагора $R^2 = x^2 + 4 = (4-x)^2 + 1$. Откуда $x = 13/8$.

Тогда $R^2 = 169/64 + 4 = 425/64$, $R = (5\sqrt{17})/8$.

Ответ: $R = (5\sqrt{17})/8$.

Указания. Верное решение – 7 баллов. Только ответ – 0 баллов. Если найдена длина отрезка MN , то начисляются 3 балла. При верном решении, в котором есть арифметическая ошибка, вычитается 1 балл.

5. Докажите, что если корнями многочлена x^2+px+1 являются числа a и b , а корнями многочлена x^2+qx+1 являются числа c и d , то верно равенство:
 $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d) = q^2 - p^2$.

Решение. По теореме Виета: $a+b=-p$ (1), $ab=1$ (2), $c+d=-q$ (3), $cd=1$ (4).

Возведем равенства (1) и (3) в квадрат и вычтем из равенства (3)² равенство (1)²: $(c+d)^2 - (a+b)^2 = q^2 - p^2$ (5).

Преобразуем выражение слева равенства (5), используя равенства (2) и (4):
 $c^2+2cd+d^2 - a^2-2ab-b^2 = c^2+d^2 - a^2-b^2 = q^2 - p^2$.

С другой стороны, левая часть доказываемого равенства (используя (2) и (4)):
 $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d) = (ab+ad-bc-cd)(ab+bd-ac-cd) = (ad-bc)(bd-ac) =$
 $= abd^2 - cda^2 - cdb^2 + abc^2 = d^2 - a^2 - b^2 + c^2$. Равенство доказано.

Указания. Верное решение – 7 баллов. Воспользовались теоремой Виета и получили равенство, близкое к равенству (5) – 3 балла.