

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 10 КЛАССА

Задача 1. Найдите все трехзначные числа, у которых двузначное число, получающееся, если стереть последнюю цифру, в пять раз больше двузначного числа, получающегося, если стереть первую цифру.

Ответ. Таких чисел нет. **Решение.** Число, делящееся на 5, оканчивается на 0 или на 5. На 0 двузначное число, получающееся, если стереть последнюю цифру нашего трехзначного, оканчиваться не может, потому что тогда число, которое получается, если стереть у нашего трехзначного числа первую цифру, не будет двузначным. Если же двузначное число, получающееся после стирания последней цифры нашего трехзначного, оканчивается на 5, то число, которое получается, если стереть у нашего трехзначного числа первую цифру, начинается на 5, и результат его умножения на 5 будет трехзначным.

- Только ответ — 0 баллов.

Задача 2. Можно ли все целые числа от 1 до 100 разбить на три группы так, чтобы сумма всех чисел первой группы была вдвое меньше суммы всех чисел второй группы, а сумма всех чисел второй группы была втрое меньше суммы всех чисел третьей группы? (Числа в группе не обязаны идти подряд.)

Ответ. Нельзя. **Решение.** Пусть сумма всех чисел первой группы равна S . Тогда сумма чисел второй группы равна $2S$, третьей — $6S$, а всех чисел — $9S$. С другой стороны, сумма всех чисел от 1 до 100 равна $100 \cdot 101/2 = 50 \cdot 101$, и на 9 не делится.

- Только ответ — 0 баллов.

Задача 3. Углы при вершинах A, B, C, D и E вписанного в окружность пятиугольника $ABCDE$ равны соответственно $95^\circ, 110^\circ, 100^\circ, 120^\circ, 115^\circ$. Найдите угол CAD .

Ответ. 45° . **Решение.** Будем обозначать длину меньшей из двух дуг, заданных точками X и Y окружности, через XY . По теореме о вписанном угле

$$AB+BC+CD = 2\angle DEA = 230^\circ \text{ и } AE+ED+CD = 2\angle ABC = 220^\circ.$$

Складывая эти равенства, получаем $(AB+BC+CD+DE+EA)+CD = 360^\circ+CD$, откуда $CD = 90^\circ$ и $\angle CAD = CD/2 = 45^\circ$.

- Только ответ — 0 баллов.

Задача 4. Можно ли расставить в клетках таблицы размером 11×11 крестики и нолики (в каждой клетке — один знак) так, чтобы в таблице было 10 столбцов, в каждом из которых крестиков больше, чем ноликов, и 10 строк, в каждой из которых ноликов больше, чем крестиков?

Ответ. Могло. **Решение.** Выделим в таблице квадрат 10×10 , находящийся в левом верхнем углу. Разобьем его на четыре квадрата 5×5 . Левый верхний и правый нижний из этих квадратов целиком заполним крестиками, а остальные два — ноликами. Затем крайний правый столбец таблицы целиком заполним ноликами, а во всех клетках нижней строки, кроме самой правой, поставим крестики. Теперь в каждом столбце таблицы, кроме самого правого, стоит 6 крестиков и 5 ноликов, а в каждой строке, кроме самой нижней — 6 ноликов и 5 крестиков.

• Только ответ «могло» — 0 баллов. Есть верный пример или его описание — 7 баллов. Нет верного примера или его описания — 0 баллов.

♦ Есть и другие примеры.

♦ Чтобы в столбце крестиков было больше, чем ноликов, в нем должно быть хотя бы 6 крестиков, а всего в таблице, удовлетворяющей условию задачи — хотя бы $6 \cdot 10$ крестиков. Аналогично, в этой таблице должно быть хотя бы $6 \cdot 10$ ноликов. Всего получается $2 \cdot 6 \cdot 10 = 120 = 11^2 - 1$ крестиков и ноликов. Таким образом, почти во всех столбцах искомой таблицы должно быть ровно по 56 крестиков, а почти во всех строках — ровно по 56 ноликов. Поняв это, можно целенаправленно строить пример (а не поняв, построить его нелегко).

• Только ответ «могло» — 0 баллов. Есть верный пример или его описание — 7 баллов. Нет верного примера или его описания — 0 баллов.

Задача 5. Каждый из десяти квадратных трехчленов $x^2 + p_i x + q_i$ ($i = 1, \dots, 10$) имеет два положительных корня, а сумма любых двух из этих трехчленов не имеет корней. Докажите, что если $p_1 < p_2 < \dots < p_{10}$, то $q_1 > q_2 > \dots > q_{10}$.

Решение. Если между корнями одного трехчлена лежит корень a другого трехчлена, и коэффициенты при x^2 у этих трехчленов положительны, то вблизи a есть точка, где значения обоих этих трехчленов, а, значит, и их сумма отрицательны, а при достаточно больших значениях x значения обоих трехчленов, а, значит, и их суммы положительны. Поэтому в описанном случае сумма двух трехчленов имеет корни. Следовательно, если сумма двух трехчленов с положительными коэффициентами при x^2 не имеет корней, то отрезки с концами в корнях этих трехчленов не пересекаются.

Упорядочим корни трехчленов из условия в порядке убывания: $x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \dots > x_{10} > y_{10} > 0$ (*). Из доказанного выше следует, что x_i и y_i — корни одного и того же трехчлена, коэффициент при x у которого равен $-(x_i + y_i)$. Заметим, что $-(x_1 + y_1) < -(x_2 + y_2) < \dots < -(x_{10} + y_{10})$. Значит, x_i и y_i — корни трехчлена $x^2 + p_i x + q_i$. Поэтому $q_1 = x_1 y_1 < q_2 = x_2 y_2 < \dots < q_{10} = x_{10} y_{10}$, что и требовалось доказать.

Задача 6. Как нужно разместить на плоскости треугольник, чтобы его проекция на данную прямую имела наименьшую длину?

Ответ. Так, чтобы его наименьшая высота была параллельна данной прямой.

Решение. Если треугольник размещен так, как указано в ответе, то его проекция на данную прямую l равна его наименьшей высоте. Покажем, что проекция треугольника на любую другую прямую не короче этой высоты. Для этого проведем через вершины A , B и C треугольника перпендикуляры a , b и c соответственно к прямой l . Выберем обозначения так, чтобы прямая c лежала между a и b . Тогда проекция треугольника ABC на l будет равна расстоянию между a и b . Теперь опустим из каждой вершины треугольника перпендикуляры на прямые a и b . Один из них, опущенный из какой-то вершины X , будет лежать между двумя другими, и потому будет пересекать сторону c концами в двух других вершинах треугольника в точке Y , лежащей между прямыми a и b . Отрезок XY не больше расстояния между прямыми a и b и не меньше высоты, опущенной из вершины X на противоположащую сторону треугольника, а та — не меньше наименьшей высоты треугольника, что и завершает доказательство.