Задания муниципального этапа

всероссийской олимпиады школьников по математике

в 2024-2025 учебном году

10 класс

Критерии оценивания

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. По кругу стоят несколько человек. Каждый из них сказал: «Один из моих соседей тяжелее меня, а другой – легче меня». Известно, что веса любых двух людей различны. Могло ли случиться, что среди стоящих солгали ровно 2025 человек?

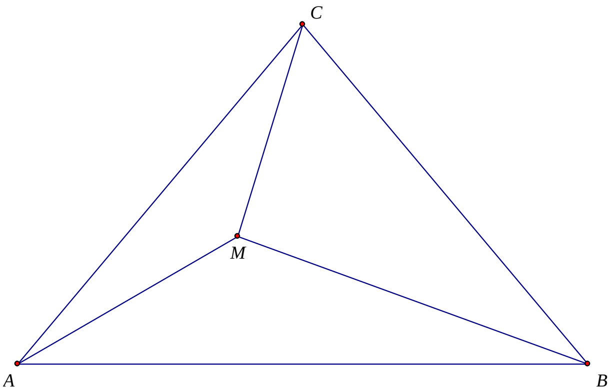
Ответ. Нет, такого быть не могло.

Решение. Лжецы, очевидно, те, у кого оба соседа легче них (назовем таких лжецов *толстыми*), или оба соседа тяжелее них (назовем таких лжецов *тонкими*). Если двигаться по кругу, начиная с *тонкого* лжеца, то веса людей будут расти до следующего лжеца, и этот лжец, очевидно, будет *толстым*. Аналогично, если начать двигаться с *толстого* лжеца, то веса людей до следующего лжеца будут убывать, и этот следующий лжец будет *тонким*. Таким образом, *толстые* и *тонкие* лжецы в круге чередуются, поэтому их должно быть поровну, а всех лжецов вместе – четное число. Но 2025 – число нечетное, т.е. ситуация невозможна.

Комментарий. Дан правильный ответ без объяснений – 0 баллов. Выделены две категории лжецов – 1 балл.

2. В равнобедренном треугольнике ABC, AC = CB, $\angle$ ACB = 100°. Точка M внутри треугольника выбрана так, что $\angle$ MAB = 30°, $\angle$ MBA = 20°. Найдите величину угла MCA.

Ответ. 20°.



Решение. Пусть $AC = BC = a$, тогда:

$\angle$ CAB = $\angle$ CBA = 40°.

Тогда из ΔACB по теореме косинусов:

$AB^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 100° =$

$= 2a^2(1 - \cos 100°) = 2a^2 \cdot 2 \sin^2 50° =$

$= 4a^2 \sin^2 50°$, то есть AB = $2a \sin 50°$.

Но тогда из $\Delta\ AMB$ по теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin M} = \frac{MB}{\sin 30^0} \Rightarrow MB = \frac{AB \sin 30^0}{\sin 130^0} = \frac{2a \sin 50^0}{2 \sin 50^0} = a.$$

Но в ΔBCM : $\angle$ $BCM = 20°$, $CB = MB = a$, то есть $\angle$ BCM = $\angle$ BMC = 80°.

4. $\angle$ MCA = 100° – 80° = 20°.

Комментарий. Дан правильный ответ без объяснений – 0 баллов. Доказано, что ΔBCM равнобедренный – 4 балла.

3. Докажите, что для любого числа d, не делящегося на 2 и на 5, найдётся число, в десятичной записи которого содержатся одни единицы и которое делится на d.

Решение. Рассмотрим числа, в десятичной записи которых содержатся одни единицы: 1, 11, 111, ... Поскольку таких чисел бесконечно много, то среди них найдутся два числа, имеющие одинаковый остаток при делении на d. Разность этих двух чисел будет иметь вид A = 1...10...0, то есть будет записываться несколькими единицами, за которыми следуют нули; кроме того, число A делится на d. По условию d взаимно просто с 10, следовательно, число из одних единиц, полученное из A вычеркиванием нулей, также делится на d.

Комментарий. Сформулирована идея о том, что мощность рассматриваемого множества больше числа остатков – 3 балла.

4. Квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $3f(x)+g(x)$ и $f(x)-g(x)$ являются квадратными трёхчленами, имеющими ровно по одному корню. Известно, что $f(x)$ имеет два корня. Докажите, что $g(x)$ не имеет корней.

Решение. Так как трёхчлен $3f(x)+g(x)$ имеет ровно один корень, то либо $3f(x)+g(x)\geqslant 0$ при любом x, либо $3f(x)+g(x)\leqslant 0$ при любом x. Рассмотрим первый случай, второй рассматривается аналогично.

Для трёхчлена $f(x)-g(x)$ также возможны два варианта: либо $f(x)-g(x)\geqslant 0$ при всех x, либо $f(x)-g(x)\leqslant 0$ при всех x.

Если $f(x)-g(x)\geqslant 0$, то

$$4f(x)=(3f(x)+g(x))+(f(x)-g(x))\geqslant 0,$$

то есть у $f(x)$ не может быть двух корней. Значит $f(x)-g(x)\leqslant 0$, следовательно, $g(x)-f(x)\geqslant 0$.

Тогда

$$4g(x)=3(g(x)-f(x))+(3f(x)+g(x))\geqslant 0.$$

Значит, $g(x)$ может иметь корень только если при каком-то x_0 одновременно обращаются в 0 выражения $g(x_0)-f(x_0)$ и $3f(x_0)+g(x_0)$, то есть x_0 является одновременно корнем трёхчленов $g(x)$ и $f(x)$.

Поскольку x_0 является единственным корнем $g(x)$, то вершина параболы $y=g(x)$ имеет абсциссу x_0. Аналогично, поскольку $g(x)-f(x)$ — квадратный трёхчлен, имеющий ровно один корень x_0, то вершина параболы $y=g(x)-f(x)$ также имеет абсциссу x_0. Но тогда и вершина параболы $y=f(x)$ имеет абсциссу x_0, поэтому $f(x)$ имеет единственный корень x_0, что противоречит условию.

Комментарий. Сформулирована идея о неотрицательности / неположительности многочленов $(3f(x)+g(x))$ и $(f(x)-g(x))$ – 2 балла.

5. Казино «У Сысолы» предлагает игру по таким правилам. Игрок ставит любое целое число фишек (но не больше, чем у него в этот момент есть) либо на орла, либо на решку. Затем подбрасывается монета. Если игрок угадал, как она упадёт, он получает назад свою ставку и столько же монет впридачу. Если не угадал – ставку забирает казино. Если игроку не повезёт четыре раза подряд, казино присуждает ему в следующей игре «утешительную победу» вне зависимости от того, как упадёт монета. Вася пришёл в казино со 100 фишками. Он обязался сделать ровно пять ставок и ни разу не ставить больше 17 фишек. Какая наибольшая сумма фишек гарантированно останется у него после игры?

Ответ. 98.

Решение. Главные наблюдения в этой задаче:

1) Один раз из пяти игрок гарантированно выиграет: либо угадает, либо получит «утешительную победу». Больше – не гарантировано.
2) Как только игрок один раз угадает, как упадёт монетка — все оставшиеся игры он может не угадать. Поэтому для максимизации гарантированного выигрыша все ставки после победы необходимо минимизировать, то есть надо ставить по 1 фишке.

Для начала покажем, что уйти, потеряв 1 фишку или меньше, игроку не удастся. От противного – посмотрим, что для этого ему пришлось бы делать:

- ✓ В первый раз игроку придётся поставить не менее 3 фишек, потому что он может выиграть эту игру и проиграть 4 следующие.
- ✓ Если он проиграл в первой игре, то во второй ему придется поставить не менее 5 фишек: ведь он может выиграть только эту партию, а проиграть минимум 3 фишек на предыдущей и ещё минимум 3 на следующих трёх.
- ✓ Если он проиграл и вторую игру, то на третьей его ставка должна быть уже минимум 9 фишек: если выиграет, то ему надо компенсировать минимум 10 фишек от поражений (3 за первую игру, 5 за вторую, по 1 за четвёртую и пятую).

- ✓ Если он проиграл и третью игру, то на четвёртой ему придётся поставить уже минимум 17 фишек: выигрыш должен компенсировать минимум 3 + 5 + 9 + 1 = 18 фишек от поражений.
- ✓ Если он проиграл и четвёртую игру, то он уже проиграл минимум 3 + 5 + 9 + 17 = 34 фишек и даже максимальной ставкой в 17 фишек он не сможет компенсировать себе убыток.

Теперь докажем, что игрок может ставить так, чтобы уйти, потеряв всего 2 фишки. Аналогично предыдущим рассуждениям, понимаем, что пока игрок проигрывает, он должен ставить 2, затем 3, 5, 9 и 17 фишек, а как только выиграет – все следующие партии ставить по 1 фишке. Несложно проверить, что в каждой ситуации игрок потеряет не более 2 фишек.

Комментарий. Сформулированы только «главные наблюдения» – 1 балл. Не доказана оценка – 3 балла. Показана оценка, правильно выстроен алгоритм игры, но сделаны ошибки в расчетах – 4 балла.