

10 класс

1. Есть 12 карточек с числами $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{12}$. Из них составляют 6 дробей, у которых числитель и знаменатель одна из карточек. При этом каждую из карточек используют ровно один раз. Какое наименьшее целое значение может иметь сумма таких дробей?

Ответ: 1.

Решение. Так как сумма положительна, то меньше 1 получить нельзя.

Пример: $2^1/2^2 + 2^9/2^{11} + 2^3/2^6 + 2^4/2^8 + 2^5/2^{10} + 2^7/2^{12} = 1$.

2. Путь от города А до города В идёт по шоссе. По шоссе можно ехать со скоростью ровно 90 км/ч, но иногда шоссе проходит по населённым пунктам – там можно ехать со скоростью ровно 60 км/ч. Известно, что ровно половина расстояния от А до В идёт по населённым пунктам. Начинаящий водитель Аркадий всё перепутал: ехал со скоростью 90 км/ч по населённым пунктам и 60 км/ч – на остальных участках, пока ровно на середине пути его не остановил капитан ГИБДД и доходчиво объяснил ему правила. Аркадий сразу всё понял и остаток пути ехал по правилам. Известно, что весь путь Аркадий проехал за 4 часа. Сколько времени из этих 4 часов он ехал по правилам?

Ответ: 2 часа.

Решение. В первой половине пути участки по населённым пунктам составляют такую же длину, как и участки вне населённых пунктов во второй половине пути. Значит, Аркадий со скоростью 90 км/ч проехал в первой половине пути такое же расстояние, как и во второй половине, поэтому на эти участки он затратил одно и то же время. Аналогично со скоростью 60 км/ч он ехал одинаковое время в первой и во второй половине пути. Следовательно, обе половины пути он проехал за одно и то же время, т.е. за 2 часа.

3. Дан параллелограмм $ABCD$, его диагонали пересекаются в точке O . Описанная окружность треугольника ABD пересекает сторону BC в точке P , а диагональ AC — в точке Q .

Описанная окружность треугольника OQD пересекает сторону CD в точке R .

Известно, что $BP : PC = CR : RD = 1 : 2$. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

Решение. Пусть $BP = x$, $CR = y$.

1) $CQ \cdot CA = CP \cdot CB = 6x$.

2) $CQ \cdot CO = CR \cdot CD = 3y$.

Так как $CO = AC/2$, то $3x = 3y$.

4. В стране восемь городов, некоторые из которых соединены дорогами. Известно, что любые четыре города можно посетить, начав в одном из них и проехав по трём дорогам. Какое наименьшее количество дорог может быть в этой стране?

Ответ: 20 дорог.

Решение. Оценка. Рассмотрим граф, в котором вершины — города, ребра — дороги.

Если степень какой-то вершины меньше 5, то она не соединена хотя бы с тремя вершинами и вместе с любыми тремя из них образует несвязный подграф из четырёх вершин, что противоречит условию. Следовательно, степень каждой вершины не меньше 5, а всего в графе не меньше $5 \cdot 8/2 = 20$ рёбер.

Пример. Расставим вершины по кругу и соединим каждую вершину с соседними, со стоящими через одну и с противоположной.

5. Дан три натуральных числа a, b, c таких, что $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a + b + c$. Докажите, что среди чисел a^3, b^3, c^3 найдутся два, у которых одинаковые остатки при делении на $a + b + c$.

Решение. Среди чисел a, b, c найдутся два одной четности. Пусть это a и b .

Тогда $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ делится на $2(a^2 + ab + b^2)$.

Покажем, что $2(a^2 + ab + b^2)$ делится на $a + b + c$ откуда будет следовать, что $a^3 - b^3$ делится на $a + b + c$, а значит, a^3 и b^3 имеют одинаковые остатки при делении на $a + b + c$.

Делимость следует из того, что

$$2(a^2 + ab + b^2) = a^2 + b^2 + (a + b)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)(a + b - c)$$