

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
КУРГАНСКАЯ ОБЛАСТЬ
2024–2025 учебный год
10 класс

Каждое задание оценивается в 7 баллов.

Время выполнения – 235 минут.

Максимальный балл – 35.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям**

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в комментариях к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

10.1. Первый член геометрической прогрессии со знаменателем 2 равен 1. Может ли произведение нескольких первых членов этой прогрессии равняться 2^{2023} ?

Ответ: нет, не может.

Решение. Произведение первых m членов такой геометрической прогрессии равно

$$1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^{m-1} = 2^{m(m-1)/2}.$$

Поскольку уравнение $m(m-1) = 4046$ не имеет натуральных корней, то ответ на вопрос задачи отрицательный.

10.2. Обычно супруги Ивановы на ужин делят пиццу в определенном отношении. Но однажды муж был голоден, и съел на 20% больше, чем обычно. При этом супруге досталось на 30% меньше, чем обычно. Как обычно Ивановы делят пиццу?

Ответ: мужу – 60%, жене – 40%.

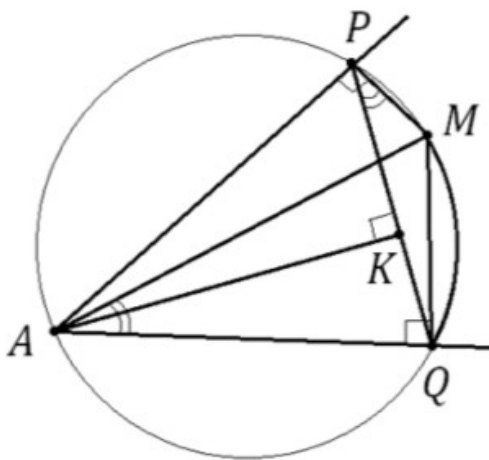
Решение: обозначим через x массу пиццы, пусть обычно p – доля мужа, $(1-p)$ – доля жены, $0 < p < 1$. Тогда в обычный день мужу достается px , а жене $(1-p)x$. В упомянутый день муж

съел $1,2 px$, а жена $0,7 (1-p)x$. Составим уравнение: $1,2 px + 0,7 (1-p)x = x$. После очевидных преобразований получаем $p = 0,6$. Значит, мужу обычно достается 60% пиццы, а жене – 40%. (Возможен ответ 3:2).

Критерии проверки. Верное решения (ответ в любой форме: доли, проценты, части) – **7 баллов**, ход решения верный, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – **5 баллов**, решения неверно или только ответ – **0 баллов**.

10.3. Из произвольной точки M внутри данного угла A опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны угла. Из точки A перпендикуляр AK на отрезок PQ . Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

Решение.



Рассмотрим четырехугольник $APMQ$: $\angle P + \angle Q = 180^\circ$. Следовательно, около четырёхугольника $APMQ$ можно описать окружность. $\angle APM = 90^\circ$, AM – диаметр этой окружности.

$\angle MAQ = \angle QPM$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу MQ . $\angle PAK = \angle QPM$ как углы взаимно перпендикулярными сторонами. Тогда $\angle PAK = \angle MAQ$.

10.4. В корзине 2021 белый шар, 2022 черных и 2023 красных. Какое наименьшее число шаров надо извлечь из корзины, чтобы среди них гарантированно оказались два шара одного цвета?

Ответ. Четыре шара.

Решение. Четырех шаров достаточно: среди четырех шаров все шары не могут быть разных цветов (имеются шары трех цветов) и, значит, есть хотя бы два шара одного цвета. Если будут вынуты только три шара, то все они могут оказаться разных цветов (один белый, один черный, один красный), т.е. наличие одноцветной пары при выемке трех шаров не гарантировано.

10.5. По доске 3×3 катается кубик. Грани кубика совпадают по размерам с клетками доски,

и после каждого хода нижняя грань кубика в точности покрывает одну из клеток. Одна из граней кубика синяя, остальные белые. Когда грань кубика ложится на клетку доски, клетка приобретает цвет грани. Изначально кубик находится в угловой клетке доски синей гранью книзу. Какое максимальное количество клеток доски могут быть синими после нескольких ходов?

Ответ. Максимальное число закрашенных клеток – 6.

Решение. Покажем, что а) сделать 6 клеток синими можно и б) большее количество клеток сделать синими нельзя. а) Для удобства расположим доску вертикально и будем считать, что изначально кубик находится в левой верхней угловой клетке. Повторяя 2 раза последовательность перекатываний ВНИЗ-ВПРАВО-ВВЕРХ, закрашиваем 3 верхних клетки доски. Затем катим кубик ВНИЗ-ВЛЕВО-ВЛЕВО-ВНИЗ-ВПРАВО-ВПРАВО – теперь он находится в правом нижнем углу синей гранью книзу. Повторяя 2 раза последовательность перекатываний ВВЕРХ-ВЛЕВО-ВНИЗ, закрашиваем 3 нижних клетки доски, – теперь 6 клеток являются синими. б) Рассмотрим три клетки, которые приобрели синий цвет последними. Перекатывая кубик от предпоследней синей клетки к последней, необходимо было как минимум две клетки сделать белыми (назовём их клетками А и Б). Допустим, удалось обойтись этими двумя клетками (иначе более шести клеток синими не сделать). Но тогда, чтобы перекатить кубик от третьей с конца синей клетки к предпоследней, тоже необходимо было как минимум две клетки сделать белыми; при этом, если их ровно две, то не более чем одна из них совпадает с одной из клеток А и Б (иначе третья с конца синяя клетка совпадает с последней). Поэтому как минимум 3 клетки являются белыми.

Критерии оценки. Только ответ – 1 балл, ответ и один из пунктов а) и б) без другого – 3 балла, оба пункта а) и б) – 7 баллов.