

10 класс

10.1 Андрей записал на доске 130 чисел, не обязательно различных. Далее он обнаружил, что среди всех возможных попарных произведений этих чисел ровно 130 отрицательных, среди попарных сумм тоже ровно 130 отрицательных. Верно ли, что ровно половина из записанных им на доске чисел являются положительными?

Решение:

Пусть на доске записано x положительных чисел, y отрицательных чисел и $z = 130 - (x+y)$ нулей.

Покажем, что $1 < y < 17$.

Действительно, если $y \leq 1$, то количество отрицательных сумм не более 129, следовательно, $y > 1$.

Если $y \geq 17$, то количество отрицательных сумм не меньше, чем $17 \cdot 16 : 2 = 136$.

Количество попарных отрицательных произведений равно $x \cdot y = 130$.

Делители числа 130: 1, 2, 5, 10, 13, 26, 65, 130.

Учитывая ограничения, записанные на y , составим таблицу всевозможных значений x , y , z и выясним, в каком случае количество отрицательных сумм может быть равно 130. Заметим, что отрицательная сумма получается в следующих случаях: при суммировании двух отрицательных чисел; при суммировании отрицательного числа и 0; при суммировании отрицательного числа и положительного, если модуль отрицательного числа больше, чем положительного.

$y=2$	$x=65$	$z=63$	Количество отрицательных сумм не меньше, чем $1+2 \cdot 63=127$
$y=5$	$x=26$	$z=99$	Количество отрицательных сумм больше 130
$y=10$	$x=13$	$z=107$	Количество отрицательных сумм больше 130
$y=13$	$x=10$	$z=107$	Количество отрицательных сумм больше 130

Таким образом, условию задачи удовлетворяет только первый случай. Делаем вывод, что количество положительных чисел равно 65, то есть ровно половина от всех записанных на доске чисел.

Замечание: примером такой последовательности чисел может служить последовательность

$$1, 1, 1, \underbrace{3, 3, \dots, 3}_{62 \text{ раза}}, -1, -2, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{63 \text{ раза}}.$$

Ответ: Да, верно.

10.2 Даны целые положительные числа $c_0, c_1, \dots, c_{100}$, такие, что

$$c_1 > c_0, \text{ и } c_2 = 3c_1 - 2c_0, c_3 = 3c_2 - 2c_1, \dots, c_{100} = 3c_{99} - 2c_{98}.$$

Докажите, что $c_{100} > 2^{99}$.

Доказательство:

В общем виде имеем (для любого $n = 1 \dots 100$):

$$c_n - c_{n-1} = 3c_{n-1} - 2c_{n-2} - c_{n-1} = 2(c_{n-1} - c_{n-2})$$

$$c_{100} - c_{99} = 2(c_{99} - c_{98})$$

$$c_{99} - c_{98} = 2(c_{98} - c_{97})$$

$$c_{98} - c_{97} = 2(c_{97} - c_{96})$$

.....

$$c_2 - c_1 = 2(c_1 - c_0)$$

Заменим все разности последовательно подставляя в первое, получим

$$c_{100} - c_{99} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2(c_1 - c_0) = 2^{99}(c_1 - c_0) \geq 2^{99}$$

Так как c_{99} — целое положительное число, то

$$c_{100} \geq 2^{99} + c_{99} > 2^{99}.$$

10.3 Когда-то, в старые времена, в одном месте жили 100 крокодилов, 99 львов и 101 карявка. Крокодилы едят карявок, карявки едят львов, а львы едят крокодилов. Древнее заклятие запрещает убивать того, кто сам погубил

нечётное число других животных. Сейчас в одном месте осталось всего одно животное. Кто это?

Решение:

1. Пусть последним остался крокодил.

Крокодилы убили всех карявок, а карявки съели всех львов. Т.к. львов нечетное количество, один из карявок должен был съесть нечетное количество львов. (Если бы все карявки съели только по четному числу львов, возможно 0, то общее количество съеденных львов было бы четным). А раз такой карявка нашелся - его не могли бы убить по залятию – противоречие.

2. Если последний остался лев, это значит, что крокодилы убили всех карявок, а львы всех крокодилов. Погибших карявок было 101, значит какой-то из крокодилов зарубил нечетное число карявок (потому что если бы все крокодилы зарубили четное число карявок, возможно 0, то общее количество убитых карявок было бы четным). А значит этот крокодил не должен был умереть по залятию – противоречие.

3. Если последним остался карявка.

Должны были погибнуть все крокодилы и все львы. Всех остальных 100 карявок убил 1 крокодил, остальные крокодилы убили по 0 карявок. 1 лев извел всех крокодилов и остальные львы по 0 крокодилов. 1 карявка съел всех 99 львов и выжил по залятию.

Ответ: карявка.

10.4 Доказать, что для любых положительных x , y справедливо неравенство:

$$2\left(\frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{xy}{x^2 + y^2}\right) \geq 5.$$

Доказательство:

Рассмотрим вспомогательное утверждение:

При $a > 0$ сумма взаимно обратных величин больше или равна 2,

то есть верно неравенство $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

(*)

Действительно,

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0 \text{ при } a > 0.$$

Заметим, что $\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

Так как $x, y > 0$, то из (*) следует, что $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

Пусть $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, тогда $\frac{1}{t} = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Итак, задача свелась к доказательству того, что при $t \geq 2$ верно неравенство:

$$2\left(t + \frac{1}{t}\right) \geq 5.$$

Рассмотрим разность

$$2\left(t + \frac{1}{t}\right) - 5 = \frac{2t^2 - 5t + 2}{t} = \frac{2(t-2)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{t}.$$

При $t \geq 2$ справедливо равенство:

$$\frac{2(t-2)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{t} \geq 0.$$

Делаем вывод, что $2\left(t + \frac{1}{t}\right) \geq 5$, что и доказывает исходное неравенство.

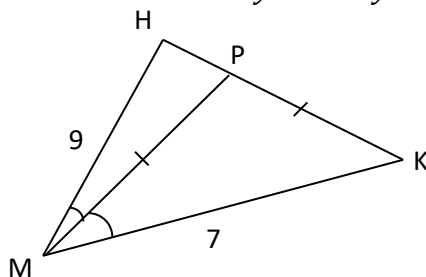
10.5 Дан треугольник MHK , его стороны равны $MH=9$, $MK=7$, биссектриса внутреннего угла M пересекается со стороной KH в точке P такой, что $PM=KP$. Какова длина стороны KH ?

Решение:

Пусть в треугольнике MHK : $KH=x$, $MP=KP=y$.

$\triangle MKN \sim \triangle MPR$ ($\angle KHM$ – общий, $\angle MKP = \angle KMP = \angle PMH$),

следовательно, $\frac{x-y}{y} = \frac{9}{7}$, $\frac{9}{y} = \frac{x}{7}$, $x = \sqrt{9 \cdot (9+7)} = 3 \cdot 4 = 12$.



Ответ: 12

Дополнительные критерии

10 класс

10.1 Приведен только пример, демонстрирующий, что количество положительных чисел может быть равно 65, ставить 1 балл.

Если при верном исследовании возможного количества положительных, отрицательных чисел и нулей отсутствует пример, показывающий, что описываемая ситуация возможна, баллы не снижать.

10.2 Замечено, что нужно рассмотреть разности, но задача до конца не доведена, ставить 2 балла.

10.4 Отмечено, что $\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, а дальнейшего продвижения нет, ставить 3 балла.

Замечено, что $\frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{xy}{x^2+y^2} \geq 2$, а дальнейшего продвижения нет, ставить 2 балла.

Факт, что сумма двух взаимно обратных положительных величин больше или равна 2, можно использовать без доказательства.

10.5 Только верный ответ, ставить 0 баллов.

При правильном обосновании получен не верный ответ – 5б.