Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2024-2025 уч.год

10 класс

Решения и ответы

1. На шахматной доске 8×8 расставлены шашки, причем на всех вертикалях стоит разное, возможно нулевое, число шашек, и на всех горизонталях стоит разное, возможно, нулевое, число шашек. Сколько всего шашек может стоять на доске? Приведите и обоснуйте все возможные ответы.

   Решение.

   Сначала рассмотрим горизонтали. На них может стоять 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 шашек, всего 9 вариантов. При этом вариант 0 шашек на какой-то горизонтали исключает вариант 8 шашек на какой-то вертикали, и наоборот, наличие 8 шашек на какой-то горизонтали означает, что ни на одной вертикали не может быть 0 шашек. Поэтому имеется всего два варианта заполнения вертикалей: число шашек меняется от 0 до 7 или от 1 до 8. Посчитаем число шашек по вертикалям.

   В первом случае сумма равна $0+1+2+\ldots+6+7=28$, во втором случае сумма равна $1+2+\ldots+6+7+8=36$. Пример каждой из двух расстановок: заполним вертикальные ряды слева направо необходимым количеством шашек в вертикали (поставим все шашки большим уголком). Наличие примера для полного обоснования решения обязательно.

   Ответ. 28 или 36.

2. Известно, что $a>0, b>0, c>0$ и $ab+bc+ac>a+b+c$. Докажите, что $a+b+c>3$.

   Решение. Используем квадрат суммы

   $$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

   С учетом известного неравенства

   $$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$$

   получаем

   $$(a+b+c)^2 \geqslant ab+bc+ac+2ab+2bc+2ac=3(ab+bc+ac)$$

   Применяем данное в условии неравенство и получаем

   $$(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ac)>3(a+b+c)$$

   Так как $a>0, b>0, c>0$, то

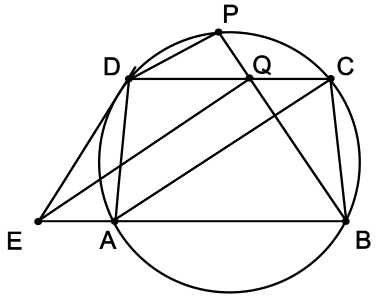
   $$a+b+c>3$$

   Неравенство доказано.

   Дополнение (не требующееся в работе).

   $$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac \;\Leftrightarrow\; 2a^2+2b^2+2c^2 \geqslant 2ab+2bc+2ac \;\Leftrightarrow\; (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0$$

3. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD, у которой $AD < CD$, вписана в окружность. DP – хорда окружности, параллельная AC. Касательная к окружности в точке D пересекает прямую AB в точке E. Отрезки PB и DC пересекаются в точке Q. Докажите, что $EQ = AC$.



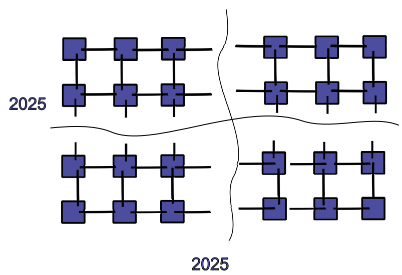
Решение.

Сначала покажем, что точка P лежит на дуге DC, не содержащей точку A. Так как $AD < CD$, $\angle PDC = \angle DCA < \angle DAC$. Это означает, что дуга CP меньше, чем дуга CD, и точки P и A, а также P и B, лежат по разные стороны от прямой CD.

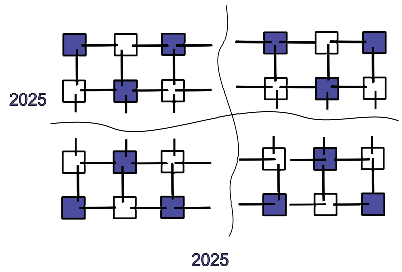
Теперь докажем, что треугольники ADE и BCQ равны. Так как трапеция вписана в окружность, она равнобедренная (этот факт считается известным и не требует доказательства в работе). Так как $DP \parallel AC$, $\angle PDC = \angle CAB$. Угол EDA – это угол между касательной ED и хордой DA. По теореме об угле между хордой и касательной, этот угол равен величине вписанного угла, опирающегося на хорду, т.е. $\angle EDA = \angle ACD = \angle CAB$. Также $\angle PDC = \angle PBC$, как опирающиеся на одну дугу PC (в этом месте мы применяем доказанное взаимное расположение точек P и C). Итак, мы получили, что $\angle EDA = \angle QBC$. Осталось заметить, что так как трапеция вписанная, $\angle EAD = 180° - \angle DAB = \angle QCB$. Отсюда треугольники ADE и BCQ равны по сторонам и двум прилежащим к ним углам.

Из равенства треугольников следует, что $EA = CQ$, и, так как $EA \parallel CQ$, то $AEQC$ – параллелограмм. Отсюда $AC = EQ$, что требовалось.

4. В некотором компьютерном центре компьютеры размещены в виде сети 2025×2025. Соседние компьютеры по горизонтали и по вертикали соединены кабелем (см. рис). В некоторый момент времени каждый компьютер послал по кабелю одному своему соседу сигнал. Докажите, что найдется компьютер, который не получил сигнала.



Решение. Раскрасим компьютеры в два цвета в шахматном порядке. Так как общее число компьютеров нечетно, то черных компьютеров будет на один больше, чем белых (черные компьютеры расположены в углах сети). Каждый черный компьютер получает сигнал от белого компьютера, возможно, от нескольких соседних. Это означает, что по крайней мере один черный компьютер не получит сигнал, так как ему не найдется парного белого.



5. Натуральное число N умножили на 100, затем прибавили двузначное число. Получившееся число оказалось равным сумме всех натуральных чисел от 1 до N. Найдите все N, при которых такое возможно.

Решение. Пусть x – прибавленное двузначное число, $10 \leqslant x \leqslant 99$. Напомним, что сумма всех натуральных чисел от 1 до N равна $\dfrac{N(N+1)}{2}$. По условию,

$$\frac{N(N+1)}{2} = 100N + x$$

Итак, условие задачи состоит в том, что

$$\begin{cases} N(N+1) = 200N + 2x, \\ 20 \leqslant 2x \leqslant 198 \end{cases}$$

Посмотрим, при каких N система имеет решения.

$$\begin{cases} N^2 - 199N = 2x, \\ 20 \leqslant 2x \leqslant 198 \end{cases}$$

$$20 \leqslant N(N-199) \leqslant 198$$

Любое натуральное число N из промежутка $1,\ 2,\ \ldots,\ 198$ делает произведение $N(N-199)$ отрицательным, что нам не подходит. Любое натуральное число N, большее 199, при подстановке в произведение $N(N-199)$ делает его больше 198, так как является произведением натуральных чисел, в котором хотя бы один множитель больше 199 ($198 < 200(200+1) < 201(201+1) < \ldots$). При $N = 199$ не выполняется условие $N(N-199) \geqslant 20$, т.е. прибавили не двузначное число. Итак, такое невозможно ни при каких натуральных N.

Ответ. Таких N не существует.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.