РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 10 КЛАССА.

10.1. Изначально на доске записано единственное число 2023. Каждую минуту Вася меняет число X на доске на сумму X и остатка X при делении на 28 (например, из числа 30 Вася получит 32). Какое число будет записано на доске через час?

Ответ. **2044.**
Решение. Рассмотрим число, записанное через несколько операций (примем во внимание, что $2023 \equiv 7\ (mod\ 28)$):
$2023 \to 2023 + 7 = 2030 \to 2030 + 14 = 2044 \to 2044 + 0 = 2044 \to 2044 \to \cdots$.
После второй операции на доске появится число 2044, которое делится на 28, а это значит, что далее число меняться не будет.

10.2. Числа a, b и c удовлетворяют условиям
$a + b - c = 2$ и $2ab - c^2 = 4$. Докажите, что $a = b = c$.

Доказательство.

Выразим из первого равенства с и подставим во второе, получим $2ab-c^2 = 2ab-(a+b-2)^2 = 2ab-a^2-b^2-4-2ab+4a+4b = 4$, что равносильно $a^2+b^2-4a-4b+8=(a-2)^2+(b-2)^2=0$, откуда $a=b=2$. Поставив в первое равенство, найдём, что $c=2$, т.е. $a=b=c$, что и требовалось доказать.

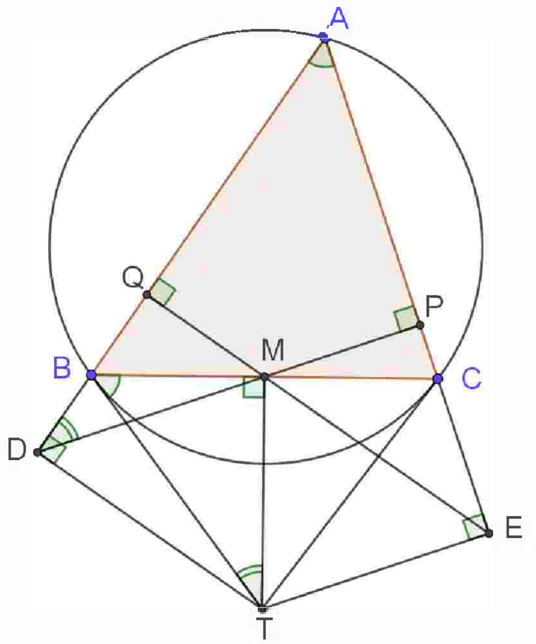
10.3. Изначально дан ряд чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2024}$.
Разрешается брать любые два числа x и y и заменять их на число равное $x + y + xy$, пока в этом ряду не менее двух чисел. В результате после выполнения всех замен останется одно число. Какое?

Ответ. **2024.**
Решение.

Заметим, что $x + y + xy = (1 + x)(1 + y) - 1$. Тогда, произведение всех чисел на доске, увеличенных на 1, не меняется в ходе операций.
На последнем шаге из двух оставшихся чисел x и y получается число
$z = x + y + xy = (1 + x)(1 + y) - 1$.
Пусть на двух предпоследних шагах числа x и y были получены из чисел
m и n, а также p и q.
Тогда $x = m + n + mn = (1 + m)(1 + n) - 1$ и
$y = p + q + pq = (1 + p)(1 + q) - 1$.
Это означает, что вне зависимости от порядка выбора пар чисел для их замен в итоге получится число
$(1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2024}\right) - 1 =$
$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2025}{2024} - 1 = 2025 - 1 = 2024.$

10.4. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке T. Из точки T на продолжения сторон AB и AC опущены перпендикуляры TD и TE соответственно. Пусть M –середина стороны BC. Докажите, что AM и DE перпендикулярны.

Доказательство.



Пусть $\angle BAC = \alpha$. Заметим, что $\angle CBT = \angle BAC = \alpha$ как угол между касательной и хордой.

Касательные отрезки TB и TC равны. Поэтому в равнобедренном треугольнике медиана TM является и высотой. Поэтому $\angle BTM = 90° - \alpha$.

Так как в четырёхугольнике $BDTM$ углы при вершинах D и M прямые, то этот четырёхугольник вписанный. Следовательно, $\angle BDM = \angle BTM = 90° - \alpha$.

Пусть DM и EM пересекают стороны AC и AB в точках P и Q соответственно.

В треугольнике ADP $\angle DAP + \angle ADP = \alpha + 90° - \alpha = 90°$. Значит, $\angle APD = 90°$.

Это означает, что $DP \perp AE$. Аналогично можно доказать, что $EQ \perp AD$.

Из этого следует, что M – ортоцентр треугольника ADE.

Поэтому $AM \perp DE$.

10.5. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и $f(0) = 2$. Для какого наибольшего количества $k = 1,2,\dots,100$ может оказаться, что $f(k)$ делится на 8?

Ответ. **63.**

Решение.

Пример: $f(x) = (1-x^2)(2-x)$. Тогда $f(x)$ делится на 8 при всех нечётных x, а также при всех x, дающих остаток 2 при делении на 8 — от 1 до 100 таких чисел $50 + 13 = 63$.

Оценка: положим $f(x) = 2 + ax + bx^2 + \dots$. Если x кратно 4, то видно, что $f(x)$ даёт остаток 2 при делении 4, поэтому не делится на 8. Если x даёт остаток 2 при делении на 4, обозначим $x = 2 + 4y$, получаем $f(x) = 2 + a(2 + 4y) + b(2+4y)^2 + T$, где T кратно 8. Таким образом, $f(x)$ кратно 8 тогда и только когда $A = 2 + 2a + 4ay + 4b$ кратно 8. Если a чётно, то это не делится даже на 4. В этом случае $f(x)$ не кратно 8 ни при каких чётных x, и искомых значений k не больше 50. Если же $a = 1 + 2d$ нечётно, то $A = 4(1 + d + b + y + 2dy)$. Это выражение на 8 делится или нет в зависимости от чётности y (то есть в зависимости от остатка x при делении на 8). Таким образом, хотя бы для одного остатка 2 или 6 при делении на 8 значения $f(x)$ не кратны 8, если x даёт этот остаток при делении на 8. Итак, во всех случаях на 8 не делятся 25 значений $f(4k)$ при $k = 1,2,\dots,25$, и ещё 12 или 13 значений вида $f(2 + 8k)(k = 0,1,\dots,12)$ или $f(6+8k)$ $(k = 0,1,\dots,11)$. Всего хотя бы 37 не кратных 8 значений, значит, не более 63 кратных.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ.

10.1. Только ответ – *0 баллов.* Не расписаны остатки от деления конкретных чисел при делении на 28, но решение верное – баллы не снимать.

10.2. Дополнительных критериев нет.

10.3. Только ответ – *0 баллов.*

а) Правильный ответ в результате последовательных замен чисел по порядку без обоснования независимости конечного результата от порядка операций – *1 балл.*

б) Получена формула замены двух чисел на новое число – 3 *балла.*

в) В результате рассуждений «с конца» обоснована независимость конечного результата от порядка замен – 3 *балла.*

10.4. а) Есть ссылка на угол между касательной и хордой – *1 балл.*

б) Обоснована вписанность $BDTM$ – *2 балла.*

в) Доказано, что M – ортоцентр ΔADE – *3 балла.*

10.5. Правильный пример – *2 балла.* Приведена оценка – *4 балла.*