10 класс

10.1. Вася написал на доске несколько различных двузначных чисел. Оказалось, что сумма никаких двух из написанных на доске чисел не равна 90. Какое максимальное количество чисел мог написать Вася?

Ответ. 55.

Решение. Заметим, что из каждой из 35 пар чисел 10-80, 11-79, 12-78, …, 44-46 на доске могло быть записано не более одного числа. Значит, по крайней мере 35 двузначных чисел из всех двузначных (от 10 до 99) не будут написаны. То есть на доске будет написано не более 90–35=55 чисел.
Если на доске написать числа 45, 46, 47, …, 99, то сумма никаких двух из них не равна 90, а этих чисел 55.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что может быть выписано не более 55 чисел – 5 баллов.
Приведен пример 55 чисел – 2 балла.

10.2. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Известно, что существуют пары различных чисел (m,k) таких, что $\frac{f(m)}{f(k)}=\frac{m}{k}$. Назовем такие пары *хорошими*. Докажите, что значение выражения $m\cdot k$ во всех хороших парах одинаково.

Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$. Тогда $\frac{f(m)}{f(k)}=\frac{am^2+bm+c}{ak^2+bk+c}=\frac{m}{k}$. Домножив на знаменатели, получим $am^2k+bmk+ck=ak^2m+bkm+cm$. Это равенство можно преобразовать к виду $(amk-c)(m-k)=0$. Так как $m\neq k$, то $amk=c$, откуда произведение $mk=\frac{c}{a}$ – одинаковое для любой пары.

Комментарий. При преобразовании равенств произведено деление обеих частей равенства на $(m-k)$, но не указано, что это выражение ненулевое – снять 2 балла.

10.3. На доске были написаны не обязательно разные неотрицательные целые числа. Коля вычел из каждого исходного числа 1, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму S_1. Вася вычел из каждого исходного числа на доске 2, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму S_2. Наконец Андрей вычел из каждого исходного числа на доске 3, затем сложил модули всех получившихся чисел, и получил сумму S_3. Сколько двоек было написано на доске?

Ответ. $\frac{S_3-2S_2+S_1}{2}$.

Решение. Пусть сумма всех чисел на доске равна S, их количество равно n, а количества нулей, единиц, двоек на доске равны соответственно a, b, c. Тогда $S_1=S-n+2a$, так как каждое число, отличное от нуля, уменьшилось на 1, а ноль, напротив, превратился в единицу, то есть оказался на 2 больше, чем 0–1. Так же $S_2 = S - 2n + 4a + 2b$, так как каждое число, отличное от нуля и единицы, уменьшилось на 2, а ноль, напротив, превратился в двойку, а единица превратилась в единицу. Наконец, аналогично, $S_3 = S - 3n + 6a + 4b + 2c$. Отсюда можно получить, что $c = \frac{S_3 - 2S_2 + S_1}{2}$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Найдены формулы для S_1, S_2, S_3 – 5 баллов.

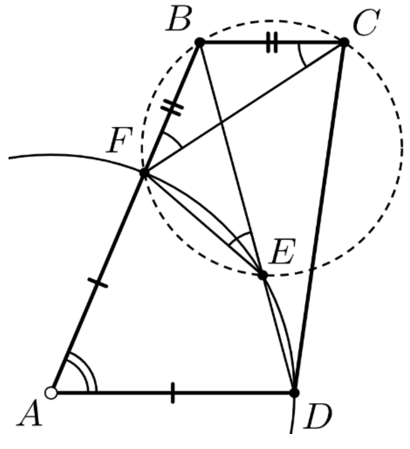
10.4. Есть 30 нечётных натуральных чисел. Оказалось, что их можно разбить на 10 троек так, что в каждой тройке одно из чисел равно произведению двух других. Может ли сумма этих 30 чисел равняться 2024?

Ответ. Не может.

Решение. Предположим, что описанная ситуация возможна. Пусть в одной из троек будут числа *a, b, ab*. Тогда их сумма есть $a + b + ab = (a+1)(b+1) - 1$. Так как числа *a, b* – нечётные, то произведение $(a+1)(b+1)$ делится на 4, как произведение двух чётных чисел. Тогда $a + b + ab = 4k - 1$. Пусть в *i*-й тройке ($i = 1, 2, \ldots, 10$) сумма равна $4k_i - 1$. Тогда сумма всех 30 чисел равна $(4k_1 - 1) + (4k_2 - 1) + \ldots + (4k_{10} - 1) = 4M - 10$. Но $4M - 10 \neq 2024$, так как число 2034 не делится на 4. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10.5. В трапеции *ABCD* длина боковой стороны *AB* равна сумме длин оснований. Окружность Ω с центром в точке *A*, проходящая через *D*, пересекает отрезки *BD* и *BA* в точках *E* и *F* соответственно. Докажите, что точки *B, C, E, F* лежат на одной окружности.



Решение. Так как *AB* = *AD*+*BC* и *AF*=*AD*, то *BF*=*BC* и треугольник *BFC* равнобедренный. Обозначим ∠*BAD* = 2 α. В окружности Ω угол *FED* вписанный, а соответствующий ему центральный угол равен 360° – 2α, поэтому ∠*FED* = 180° – α и смежный с ним ∠*FEB* = α. Основания *BC* и *AD* трапеции параллельны, значит, ∠*ABC* = 180° – 2α, а раз треугольник *BFC* равнобедренный, то ∠*BCF* = ∠*BFC* = α. Таким образом, ∠*BCF* = ∠*BEF*, а значит, точки *B, C, E, F* лежат на одной окружности.

Комментарий. Доказано, что треугольник *BFC* равнобедренный – 2 балла.