

10.1. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x^3 + 8y^3 + 6xy = 1. \end{cases}$$

Ответ: Множество решений представляет собой прямую $y = \frac{1-x}{2}$. **Решение.** Второе уравнение есть следствие первого, так как, используя первое уравнение, во втором получим:

$$x^3 + 8y^3 + 6xy = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) + 6xy = x^2 - 2xy + 4y^2 + 6xy = (x + 2y)^2 = 1.$$

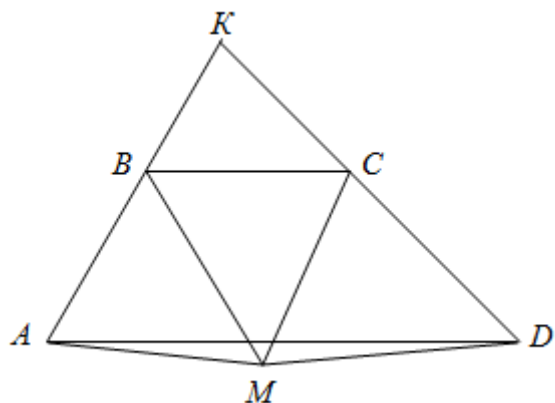
Таким образом, второе уравнение не несет новой информации.

10.2. Решите уравнение $x^4 + 4 + 2x(x^2 - 2x + 2) = 0$.

Ответ: $-2 \pm \sqrt{2}$. **Решение.** Разложим левую часть уравнения на множители, дополнив до полного квадрата:

$$x^4 + 4 + 2x(x^2 - 2x + 2) = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 + 2x(x^2 - 2x + 2) = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 + 2x(x^2 - 2x + 2) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) + 2x(x^2 - 2x + 2) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4x + 2).$$
Тогда получим $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4x + 2) = 0$. Корнями первого множителя являются $-2 \pm \sqrt{2}$, а второй множитель имеет отрицательный дискриминант. *Комментарий: разложить левую часть уравнения на множители можно было также, если разделить уголком $(x^4 + 4)$ на $(x^2 - 2x + 2)$.*

10.3. Дана трапеция $ABCD$ с углами A и D при основании AD , равными 60° и 45° соответственно. Биссектрисы углов B и C пересекаются в точке M . Найдите отношение площадей треугольников ABM и CDM .



Ответ: $\frac{S_{ABM}}{S_{CDM}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **Решение.** Пусть K – точка

пересечения прямых AB и CD . Так как BM – биссектриса угла ABC , то точка M равноудалена от прямых AB и BC . Аналогично, точка M равноудалена от прямых BC и CD как биссектриса угла BCD . Следовательно, точка M равноудалена от прямых AB и CD . Значит, она лежит на биссектрисе угла AKD , а треугольники ABM и CDM имеют равные высоты из вершины M . Поэтому $\frac{S_{ABM}}{S_{CDM}} = \frac{AB}{CD}$. В силу параллельности оснований трапеции BC и AD ,

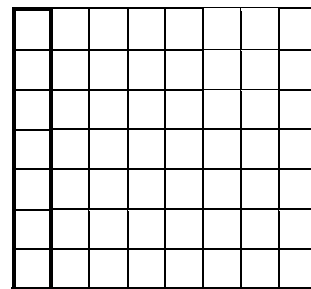
по теореме Фалеса имеем $\frac{AB}{CD} = \frac{AK}{KD}$, а по теореме синусов для $\triangle AKD$ получим $\frac{AK}{KD} = \frac{\sin \angle ADK}{\sin \angle KAD}$.

Таким образом, $\frac{S_{ABM}}{S_{CDM}} = \frac{\sin \angle ADK}{\sin \angle KAD} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

10.4. Существует ли такое натуральное n , что сумма цифр каждого из чисел n и $n+1$ делится на 100?

Ответ: существует. **Решение.** Обозначим через $s(n)$ сумму цифр натурального числа n . Если n оканчивается не на 9, то $s(n+1) = s(n) + 1$, и такое n не подходит. Пусть теперь n оканчивается на k девяток, т.е. имеет вид $n = \overline{m99\dots 9}$ где m – натуральное число, оканчивающееся не на 9. Тогда $s(n) = s(m) + 9k$, $s(n+1) = s(m) + 1$. Вычитая эти числа, из условия задачи получим $9k - 1 = 100 \cdot l$ при некотором l . Возьмем $l = 8$ (чтобы $100l + 1$ делилось на 9, наименьшим l будет $l = 8$). Отсюда $9k = 801$ и $k = 801 : 9 = 89$. Чтобы $s(n)$ делилось на 100, в силу равенства $s(n) = s(m) + 801$ можно положить $s(m) = 99$. Тогда m можно взять, например, 12-значным: $m = 99\dots 981$ (здесь 10 девяток) и значит, n будет 101-значным числом $n = 99\dots 98199\dots 9$ (вначале 10 девяток, затем 8 и 1, в конце – 89 девяток), а можно m взять состоящим из 99 единиц, и тогда n будет 188-значным числом: $n = 11\dots 199\dots 9$ (99 единиц и 89 девяток).

10.5. В некоторые клетки шахматной доски 8×8 поставлены шашки. Для каждой из 64 клеток подсчитали число шашек в 15 клетках, находящихся с этой клеткой в той же строке или том же столбце. Могло ли оказаться так, что все эти 64 числа четные?



Ответ. Не могло. **Решение.** Для данной клетки A будем называть A -крестовиной все 15 клеток в той же строке или столбце, что и A (считая и саму клетку A). Неполной A -строкой будем называть 7 клеток в той же строке, что и A , но без самой клетки A . Аналогично определяется неполный A -столбец. Докажем, что не может на всех 64 крестовинах число шашек оказаться четным. Действительно, предположим противное и рассмотрим произвольные A - и B -крестовины с клетками A и B из одного столбца. Тогда при вычитании числа шашек на этих крестовинах получим, что в неполных A - и B -строках число шашек одинаковой четности. Аналогично, для двух клеток A и B из одной строки число шашек в неполных A - и B -столбцах одинаковой четности. Теперь рассмотрим какую-нибудь шашку на доске, пусть она находится в клетке A . Без ограничения общности можно считать, что A – угловая клетка (левая нижняя; этого можно добиться, переставив целиком на первое место строку и затем столбец, где находится A , при этом свойство четности для крестовин не меняется). По предположению, число шашек в A -крестовине четно, а значит, без самой шашки из клетки A число шашек на единицу меньше, и поэтому нечетно. Пусть для определенности число шашек в неполной A -строке (т.е. в первой строке), нечетно, а в неполном A -столбце (т.е. в первом столбце) четно. «Отрежем» от нашей доски каёмку из 15 клеток первой строки и первого столбца (см. рис.) и тогда на полученной доске 7×7 в каждой строке будет нечетное число шашек, а в каждом столбце – четное. Но это противоречит тому, что если подсчитать все шашки на этой доске 7×7 по строкам, то получится нечетная сумма (сумма семи нечетных чисел), а если по столбцам – то четная (сумма семи четных чисел). Противоречие доказывает наше утверждение.

