Всероссийская олимпиада школьников 2024-2025 учебный год

Муниципальный этап

Математика

Ответы

10 класс

Продолжительность – 235 минут

Максимальный балл – 35

Задача №1

Решение. Предположим, что при некотором n удалось найти расстановку, удовлетворяющую условиям задачи. Тогда после каждого чётного числа против хода часовой стрелки стоят два числа одинаковой чётности (сумма двух чисел разной чётности является нечётной и не может делиться на чётное число).

1. Если хотя бы для одного чётного числа оба его «предшественника» чётны, то рассмотрим ближайшее к ним против хода часовой стрелки нечётное число. Следующие за ним по ходу часовой стрелки два числа чётны, но сумма нечётного и чётного числа не может делиться на чётное число.

2. Если для каждого чётного числа оба его «предшественника» нечётны, то между каждыми двумя чётными числами стоит по крайней мере два нечётных. Если чётных чисел на окружности k, то нечётных — не меньше $2k$. Но так как разность между количеством нечётных и количеством чётных чисел не больше 1, получаем, что $k \leq 1$. Это значит, что $n \leq 3$. Но по условию $n \geq 3$. Пример для $n = 3$ очевиден (годится любая расстановка).

Ответ: $n = 3$.

(7 баллов)

Задача №2

Расположим камни как показано на рисунке, где кучки соответствуют столбцам. Петя должен брать несколько камней из одного столбца, а Вася – из разных. Стратегия Васи – делать ходы, симметричные Петиным относительно пустой диагонали. Изначально картинка симметрична. Поскольку строка, симметричная столбцу, не имеет с ним общих камней, то Вася каждый раз сможет восстанавливать нарушенную симметрию, то есть у него всегда есть ход. Так как игра конечна, то когда-то Петя проиграет.

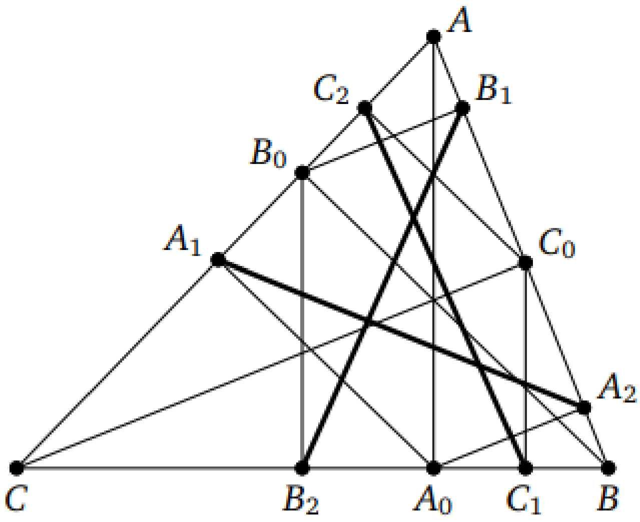
Ответ: Вася

	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
●		●	●	●	●	●	●	●	●	●
●	●		●	●	●	●	●	●	●	●
●	●	●		●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●		●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●		●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●		●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●		●	●	●
●	●	●	●	●	●	●	●		●	●
●	●	●	●	●	●	●	●	●		●
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	

(7 баллов)

Задача №3

Точки A_1 и A_2 лежат на окружности с диаметром AA_0 , так как $\angle A_0A_1A$ = $\angle A_0A_2A$ = 90◦ (рис). Поэтому в силу теоремы синусов $\frac{A_1A_2}{\sin\angle A_1AA_2} = 2R_A = AA_0 = AB * \sin\angle ABC$. Отсюда следует, что $A_1A_2 = AB * \sin\angle ABC$ * sin $\angle CAB$. Но по теореме синусов AB = 2R · sin ∠BCA. Итак, $A_1A_2 = 2R * \sin\angle ABC * \sin\angle CAB * \sin\angle BCA$. Таким образом, мы не просто доказали утверждение задачи, но и вывели формулу, согласно которой расстояние между проекциями основания высоты треугольника на его стороны равно 2R· sin α· sin β · sin γ, где α, β, γ — углы треугольника.



(7 баллов)

Задача №4

Ответ. Второй.

Решение. Заметим, что если какой-то из игроков выпишет на доску число 500 или 999 (назовём такой ход проигрышным), то его противник следующим ходом выпишет число 1000 и выиграет. Какие числа могут быть выписаны на доску до появления чисел 500 и 999? Во-первых, это все числа от 1 до 499 (их 499). Во-вторых, это все числа от 502 до 998 (их 497), так как 502 можно получить удвоением из числа 251. Заметим также, что число 501 может получиться только из числа 500, т. е. перед появлением числа 500 или 999 будет сделано не более 499 + 497 = 996 непроигрышных ходов. При этом если сделано менее 996 непроигрышных ходов, то можно сделать ещё один. Действительно, все числа от 2 до 499 можно получить из 1 операцией a + 1. Число 502 получается из 251. А из 502 можно получить все числа от 503 до 998. Таким образом, можно сделать чётное число непроигрышных ходов. Это означает, что проигрышный ход сделает первый игрок.

(7 баллов)

Задача №5

Пусть числа a, b, a^2 входят в прогрессию. Тогда $b = a + nd$, $a^2 = a + md$. Отсюда следует, что $b - a = nd$. Тогда $b^2 = a^2 + b^2 - a^2 = a^2 + (b - a)(b + a) = a + md + nd(b + a) = a + kd$, т. е. b^2 также входит в прогрессию.

(7 баллов)