

**МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧЛЕНОВ ЖЮРИ
(КЛЮЧИ, КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ)**

Максимальное количество баллов – 42 балла

1. Найдите какое-нибудь число A такое, что $2A$ является точным квадратом, а $3A$ – точным кубом натурального числа.

Решение: Например, $2^3 \cdot 3^2 = 72$. $2A$ – это квадрат числа 12, $3A$ – куб числа 6.

Критерии проверки: Любой верный пример числа с проверкой – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

2. В корзине лежат яблоки и груши. Если добавить туда столько же яблок, сколько сейчас там груш, то процент яблок будет вдвое больше, чем процент яблок, если добавить в корзину столько груш, сколько сейчас там яблок. Какой процент яблок сейчас в корзине?

Ответ: 50%

Решение: Пусть x, y – количество яблок и груш. Тогда из условия следует равенство:

$$\frac{x+y}{x+2y} = 2 \cdot \frac{x}{2x+y}. \text{ После очевидных преобразований получим } y^2 = xy. \text{ Так как}$$

количество груш не равно нулю, то $x=y$.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, ход решения верный, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – **5 баллов**, построена математическая модель (уравнение), но решение не доведено до конца или неверно – **2 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

3. В 10 «А» классе 30 человек. Каждый из них после уроков либо читает книги, либо читает комментарии в соцсетях, либо не читает ничего. Любители книг на любой вопрос дают верный ответ, любители комментариев - всегда неверный, а не читающие на прозвучавшие вопросы строго попеременно то отвечают верно, то ошибаются (неизвестно, с верного или неверного ответа они начинают). Всем учащимся задали подряд три вопроса: «Ты читаешь книги?», «Верно ли, что ты не читаешь ничего?» и «Ты читаешь комментарии в соцсетях?». В результате получили соответственно 19, 12 и 9 утвердительных ответов. Сколько учеников в 10 «А» ничего не читает после уроков?

Ответ: 20.

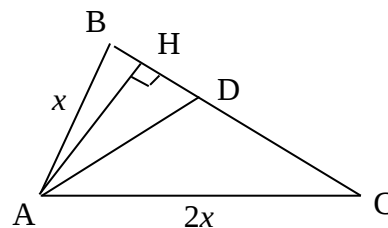
Решение. Заметим, что не читающие ученики, которые с первого вопроса начинали отвечать верно, ни разу не ответили утвердительно. Пусть a – количество читающих книги, b – количество ничего не читающих, которые ошиблись в ответе на первый вопрос, верно ответили на второй и ошиблись в ответе на третий, c – количество читающих соцсети. Тогда имеем $a+b+c=19$, $b+c=12$ и $b=9$. Откуда $c=3$, $a=7$. Тогда количество ничего не читающих всего 20.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, верно описана математическая модель в виде системы равенств, дальнейшее неверно – **2 балла**, замечено, что ничего не читающих, которые начинали отвечать верно, не говорили «да» – **1 балл**, найдено только число, читающих книги, или только число, читающих соцсети – **1 балл**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**. (подчеркнутые баллы суммируются)

4. В треугольнике ABC длины всех сторон – целые числа. Биссектриса, проведенная из вершины A , делит сторону BC на отрезки 2 и 4. Высота, проведенная из этой же вершины, равна $\sqrt{15}$. Найдите длины сторон треугольника ABC .

Ответ: 4, 6 и 8.

Решение: Пусть AD – биссектриса, $BD = 2$, $DC = 4$. Тогда по свойству биссектрисы треугольника $AB:AC = 2:4$, обозначим $AB = x$, $AC = 2x$. Пусть AH – высота, точка H на стороне BC , $BH = y$. Из прямоугольных треугольников ABH и ACH получаем систему уравнений: $x^2 - y^2 = 15$ и



$4x^2 - (6 - y)^2 = 15$. Решая ее, находим $y_1 = -1$, $y_2 = -3$. Это означает, что основание высоты AH не может находиться на отрезке BC , а попадает на его продолжение. В этом случае в аналогичной системе уравнений второе уравнение (для треугольника ACH) примет вид $4x^2 - (6 + y)^2 = 15$. Решая ее, находим $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. В первом случае $x_1 = 4$, во втором – x не целое число. Таким образом, длины сторон треугольника ABC равны 4, 6 и 8.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, ход решения верный, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – **6 баллов**, верное решение только для случая, когда высота опускается на продолжение стороны – **5 баллов**, показано, что высота не могла опуститься на сторону – **2 балла**, решение неверно – **0 баллов**.

5. Буратино имеет на счете в банке 500 сольдо. Банк разрешает совершать только два вида операции: снимать 300 сольдо или добавлять 198 сольдо. Какую максимальную сумму Буратино сможет снять со счета, если других денег у него нет?

Ответ: 498 сольдо.

Решение: Поскольку 300 и 198 делятся 6, то снять можно только сумму, кратную 6. Наибольшее такое число, не превосходящее 500, это 498. Покажем, что снять такую сумму возможно. Заметим, что можно совершить подряд пять следующих операций: -300 , $+198$, -300 , $+198$, $+198$. После этого сумма на счете уменьшится на 6 сольдо. Совершив всего 16 таких последовательностей, сумма уменьшится на 96 сольдо. Затем можно снять 300, затем добавить 198 и снова снять 300. В результате будет снято 498 сольдо.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, доказана оценка «не более 498» – **3 балла**, приведена последовательность шагов для снятия суммы 498 – **3 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

6. Найдите все значения параметра a , при которых существуют ровно два целых значения x , удовлетворяющих неравенству $x^2 + 5\sqrt{2}x + a < 0$.

Ответ: $25(\sqrt{2} - 1) \leq a < 3(5\sqrt{2} - 3)$.

Решение: Рассмотрим функцию $y = x^2 + 5\sqrt{2}x + a$, ее графиком является парабола с вершиной в точке $x_0 = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$, которая симметрична относительно прямой $x = x_0$.

Заметим, что $3,5 < \frac{5\sqrt{2}}{2} < 4$. Значит, к оси симметрии самая ближняя целая точка – это (-4), затем идет (-3), затем (-5) и так далее. То есть значения квадратного трехчлена в этих точках образуют возрастающую последовательность. Таким образом, неравенство должно выполняться лишь для $x = -3$ и $x = -4$. Это равносильно системе двух неравенств: $y(-3) < 0$, $y(-5) \geq 0$. Первое дает множество $a < 3(5\sqrt{2} - 3)$, а второе $a \geq 25(\sqrt{2} - 1)$.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, обоснованно описана модель в виде системы неравенств – **3 балла**, замечено, что в точках -4, -3, -5 значения квадратичной функции соответственно возрастают – **2 балла**, решение неверно – **0 баллов**.