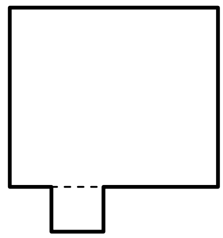
Второй (муниципальный) тур всероссийской олимпиады школьников по математике в 2024-2025 учебном году

10 класс



1. Замок Персиваля имел квадратную форму. Однажды Персиваль решил расширить свои владения и добавил к замку квадратную пристройку. В результате периметр замка увеличился на 10%. На сколько процентов увеличилась площадь замка?

Ответ: 4%.

Решение. Пусть ширина замка равна a, а ширина пристройки b. Тогда первоначальный периметр равен 4a, а итоговый периметр равен 4a + 2b. Тогда:

$$1{,}1 \cdot 4a = 4a + 2b \Leftrightarrow b = 0{,}2a.$$

Отсюда площадь замка стала равна $a^2 + (0{,}2a)^2 = 1{,}04a^2$, то есть площадь увеличилась на 4%.

2. Известно, что $a^2 + b = b^2 + c = c^2 + a$. Какие значения может принимать выражение $a(a^2 - b^2) + b(b^2 - c^2) + c(c^2 - a^2)$?

Ответ: 0.

Решение. Заметим, что равенство $a^2 + b = b^2 + c$ можно записать в виде: $a^2 - b^2 = c - b$. Аналогично имеем

$b^2 - c^2 = a - c$, $c^2 - a^2 = b - a$.

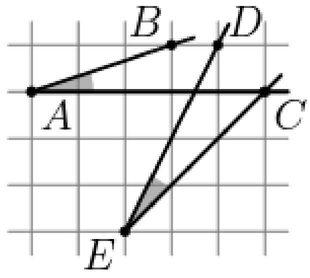
Подставляя эти равенства в искомые выражения, получаем, что

$a(a^2 - b^2) + b(b^2 - c^2) + c(c^2 - a^2) = a(c - b) + b(a - c) + c(b - a) = = 0$.

3. На доске в произвольном порядке выписаны числа от 1 до 2025. Два числа можно поменять местами, если одно из них делится на другое. Докажите, что за несколько таких операций числа можно расположить в порядке возрастания.

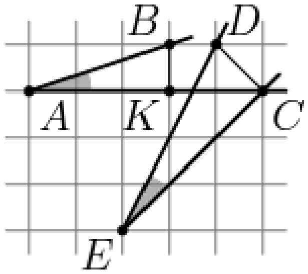
Решение. Покажем, как поставить число k = 1 на k-ое место. Пусть на k-ом месте стоит число n. Поменяем сначала n с 1, затем поменяем k с 1. Тогда k действительно окажется на своём месте. Последовательно ставя на свои места числа 2025, 2024, . . . , мы поставим все числа в порядке возрастания.

4. Сравните величины углов BAC и CED (см. рисунок). Свой ответ обоснуйте.



Ответ: эти углы равны.

Решение. Пусть K — основание перпендикуляра, опущенного из B на AC.



Рассмотрим треугольники ABK и EDC. Они оба прямоугольные, причем их катеты относятся как $1 : 3$. Значит, тангенсы отмеченных углов равны $1/3$, то есть сами углы тоже равны.

5. Несколько мудрецов построилось в колонну. На всех были либо черные, либо белые колпаки. Оказалось, что среди любых 10 подряд идущих мудрецов поровну мудрецов с белыми и с черными колпаками, а среди любых 12 подряд идущих не поровну. Какое наибольшее количество мудрецов могло быть?

Ответ: 15 мудрецов.

Решение. Докажем, что больше 15 мудрецов быть не может. Предположим противное, пусть мудрецов хотя бы 16. Последовательно занумеруем всех мудрецов. Рассмотрим девять подряд идущих мудрецов. Если к ним добавить одного из двух соседних мудрецов, то среди них будет одинаковое число мудрецов с белыми и чёрными колпаками, поэтому на любых мудрецах, между которыми находится 9 мудрецов, надеты колпаки одинакового цвета.

Без ограничения общности, на первом мудреце надет чёрный колпак. Тогда на одиннадцатом мудреце также чёрный колпак. Если на двенадцатом мудреце надет белый колпак, то среди первых двенадцати мудрецов будет поровну белых и чёрных колпаков. Поэтому на двенадцатом мудреце надет чёрный колпак, откуда и на втором мудреце надет чёрный колпак. Аналогично рассмотрев мудрецов со второго по одиннадцатого, получим что на мудрецах 3 и 13 надеты колпаки чёрного цвета. Рассмотрев мудрецов с третьего по двенадцатого, получим, что на мудрецах 4 и 14 надеты колпаки чёрного цвета. Аналогично на мудрецах 5 и 15, 6 и 16 надеты колпаки чёрного цвета. Но тогда среди первых десяти мудрецов на первых шести чёрные колпаки, поэтому чёрных колпаков будет больше. Противоречие.

15 мудрецов может быть: пусть на первых 5 и последних 5 мудрецах надеты чёрные колпаки, а на оставшихся 5 надеты белые колпаки. Несложно понять, что тогда условие задачи будет выполнено.