

Пермский край  
2024-2025 учебный год  
**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
ПО МАТЕМАТИКЕ  
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП  
10 КЛАСС**

Время выполнения заданий – 235 минут (3 часа 55 минут).

Максимальная оценка за выполнение всех олимпиадных заданий – 35 баллов (по 7 баллов за каждую задачу).

10.1. В автомат для выпекания пиццы загружается квадратный лист теста со стороной 50 см. Автомат может либо вырезать из листа одну большую круглую пиццу наибольшего возможного диаметра, либо сначала разрезать лист на 25 квадратов со стороной 10 см, а потом из каждого такого квадрата вырезать маленькую круглую пиццу наибольшего возможного диаметра. В каком случае получается больше теста в пиццах?

**Ответ:** В обоих случаях теста будет одинаковое количество.

**Решение.** В первом случае площадь круга равна  $625\pi$  см<sup>2</sup>. Во втором случае площадь каждого маленького круга равна  $25\pi$ , а так как кругов 25, то суммарная площадь опять оказывается  $625\pi$ .

*Критерии оценки:*

приведен верный ответ с полным обоснованием - 7 баллов,

правильный ответ без объяснения – 0 баллов.

10.2. Существует ли треугольник, высоты которого равны 1, 2 и 3?

**Ответ:** Нет, такого треугольника не существует.

**Решение.** Пусть такой треугольник есть. Обозначим длины его сторон через  $a$ ,  $b$  и  $c$ . По формуле площади треугольника получаем, что  $1a = 2b = 3c$ , то есть  $a = 3c$ ,  $b = 1.5c$ . Но  $c + 1.5c < 3c$ , следовательно,  $a > b + c$ , что противоречит неравенству треугольника. Значит, такого треугольника не существует.

*Критерии оценки:*

приведен верный ответ с полным обоснованием - 7 баллов,

переход к площади треугольника и нахождение отношений сторон – 2 балла,

правильный ответ без объяснения – 0 баллов.

10.3. На плоскости находятся две точки, расстояние между которыми равно  $R$ . В момент времени  $t=0$  точки одновременно начинают двигаться с постоянными скоростями по непараллельным прямым. В момент времени  $t=T$  расстояние между точками снова оказалось равным  $R$ . В какой момент точки находились на минимальном расстоянии?

**Ответ:** В момент времени  $t=T/2$ .

**Решение.** Первый способ. Будем рассматривать движение точек с позиции наблюдателя, находящегося в первой точке (назовем ее  $A$ ). Тогда точка  $A$  неподвижна, а вторая точка движется относительно нее с постоянной скоростью по некоторой прямой  $\ell$ . Очевидно, что кратчайшее расстояние от  $A$  до  $\ell$  – длина перпендикуляра, опущенного из  $A$  на  $\ell$ . Если в момент времени  $t=0$  вторая точка находилась в точке  $B$ , а в момент времени  $t=T$  – в точке  $C$ , то, поскольку  $AB=AC=R$ , треугольник  $BAC$  – равнобедренный, следовательно медиана и высота, проведенные из вершины  $A$ , совпадают. Значит, основание перпендикуляра совпадает с серединой отрезка  $BC$  и вторая точка проходит его в момент времени  $t=T/2$ .

Второй способ. Введем прямоугольную систему координат  $Oxy$ , взяв за ось  $Ox$  прямую, по которой движется первая точка. Пусть  $u, v$  – векторы скоростей точек, а в начальный момент времени они находились в точках  $P(p,0)$  и  $Q(q_1, q_2)$ . В произвольный момент времени  $t$  координаты первой точки  $(p+ut, 0)$ , координаты второй  $(q_1+v_1t, q_2+v_2t)$ . Найдем квадрат расстояния между точками:  $\rho^2(t) = (p+ut - q_1 - v_1t)^2 + (q_2 + v_2t)^2 = at^2 + bt + c$ . Таким образом, квадрат расстояния есть квадратный трехчлен относительно переменной  $t$ . Так как в точках  $0$  и  $T$  он принимает одинаковые значения, то его минимум – в точке  $T/2$ .

*Критерии оценки:*

факт, что одна точка движется относительно другой по прямой, принимается без доказательства,

приведен верный ответ с полным обоснованием - 7 баллов,

задача решена только в случае движения по перпендикулярным прямым – 3 балла,

правильный ответ без объяснения – 0 баллов.

10.4. Найдите натуральное число, делящееся на 2024, с наименьшей возможной суммой цифр.

**Ответ:** Например, число  $10^3+10^{14}$ .

**Решение.** Заметим, что  $2024=8 \times 11 \times 23$ . Число  $10^{11}+1$  делится и на 23 (так как  $100000000001 : 23 = 4347826087$ ), и на 11 (по признаку делимости на 11). Для того, чтобы число разделилось также и на 8, припишем к нему справа три нуля. Так как 8, 11 и 23 – взаимно простые числа, то найденное число  $10^3+10^{14}$  делится на 2024. Сумма цифр данного числа равна 2, и это минимально возможная сумма: число с суммой цифр 1 можно составить только из одной единицы и нулей, а такое число не делится на 11.

*Замечание.* Как найти число  $10^3+10^{14}$ ? Искать число с суммой цифр 2, делящееся на 8, 11 и 23. Числа вида  $2 \times 10^n$ , очевидно, не подходят, значит, надо искать число вида  $10^n+10^k$ . Три нуля в конце ( $k=3$ ) обеспечивают делимость на 8. Делимость на 11 будет, если между единицами чётное количество нулей. Остается делить выражение вида  $1000\dots$  на 23 (например, столбиком) и ждать, когда  $100\dots001$  разделится на 23. Если бы процесс такого деления зациклился или между единицами оказалось нечётное число нулей, искомого числа не существовало бы.

*Критерии оценки:*

приведен верный ответ с полным обоснованием - 7 баллов,

верный ход решения, но неправильный ответ из-за вычислительной ошибки – 4 балла,

правильный ответ без объяснения – 0 баллов.

10.5. Чтобы открыть кодовый замок, нужно набрать на клавиатуре подряд три цифры, составляющие код. О коде известно только то, что он состоит из цифр 1, 2, 3 и цифры в нем могут повторяться. На набор одной цифры требуется 1 секунда. Можно ли гарантированно открыть замок меньше чем за полминуты? (Например, если последовательно набрать 12321, а код имеет вид 123, 232 или 321, то замок откроется.)

**Ответ:** да, замок можно открыть за 29 секунд.

**Решение.** Наберем на клавиатуре следующую последовательность цифр: 33311121131221231321332223233. Эта последовательность содержит все комбинации из трех цифр 1, 2, 3 и состоит из 29 цифр. Следовательно, замок точно откроется максимум за 29 секунд.

*Замечание.* Приведенная последовательность цифр – только одна из возможных.

*Критерии оценки:*

верная последовательность без явного ответа «можно» – 7 баллов,

правильный ответ без объяснения – 0 баллов.