Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике Республика Татарстан, 9 декабря 2024 г.

10 класс

1. В семизначном числе зачеркнули одну из цифр и из исходного числа вычли это шестизначное. В результате получили число 7654321. Найдите исходное число.

Ответ: 8504801.

Решение. Пусть x — полученное после зачёркивания цифры шестизначное число. Заметим, что зачёркнутая цифра была последней в исходном числе, так как в противном случае после вычитания последняя цифра была бы нулем. Пусть это цифра y. Тогда разность исходного и полученного числа равна $(10x+y)-x = 7654321$, то есть $9x+y = 9\cdot850480+1$. Значит, цифра y равна остатку от деления числа 7654321 на 9, а x равно частному от деления, то есть $y = 1$ и $x = 850480$.

Критерии. Верный ответ без объяснений — 2 балла. Доказано, что в исходном числе зачёркнута последняя цифра — ещё 1 балл. Доказано, что последняя цифра совпадает с остатком при делении на 9 — ещё 2 балла. Задача полностью решена в предположении, что зачёркнута последняя цифра — 5 баллов. Арифметическая ошибка — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

2. На доске написано 100 ненулевых чисел. Оказалось, что сумма кубов любых двух написанных чисел равна сумме всех остальных. Чему может быть равна сумма всех написанных чисел?

Ответ: 700 *или* -700.

Решение. Сначала докажем, что все написанные числа равны друг другу. Предположим, что среди них есть два неравных числа a, b и $a > b$. Пусть S — сумма всех написанных чисел, c — любое другое написанное число. По условию $a^3 + c^3 = S - a - c$ и $b^3 + c^3 = S - b - c$. Вычитая из первого равенства второе, получим $a^3-b^3 = b-a$ или $a^3+a = b^3+b$. По предположению $a > b$, поэтому $a^3 > b^3$, и значит, $a^3 + a > b^3 + b$, противоречие.

Значит, все 100 написанных чисел равны одному и тому же числу a, их сумма равна $S = 100a$. По условию $a^3 + a^3 = S - a - a$, то есть $2a^3 = 98a$, и так как $a \neq 0$, получаем, что $a^2 = 49$, то есть $a = 7, S = 700$ или $a = -7, S = -700$.

Критерии. Указан хотя бы один из ответов — 1 балл. Получено равенство вида $a^3 + a = b^3 + b$ — 1 балл. Доказано, что все числа равны друг другу — ещё 3 балла. Доказано, что все числа равны, но пропущен один из случаев $S = 700$ или $S = -700$ — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. В некотором государстве есть 13 городов. Между некоторыми парами городов будут установлены двусторонние прямые автобусные, железнодорожные или самолетные сообщения. Какое *наименьшее* возможное количество сообщений необходимо установить, чтобы, выбрав любые два вида транспорта, можно было добраться из любого города в любой другой, не используя третий вид транспорта?

Ответ: 18 *сообщений.*

Решение. Пример для 18 сообщений показан на рис. 4. Красные, синие и зелёные линии (рёбра) обозначают три различных вида транспорта. В этом графе любые два города A и B соединяются друг с другом через город O дорогой из одного или двух рёбер, то есть из A в B можно добраться, не используя третий вид транспорта. С другой стороны, связный граф с 13 вершинами имеет не менее 12 рёбер, поэтому общее количество соединений для любых двух видов транспорта составляет по крайней мере 12. Таким образом, удвоенное общее количество всех соединений составляет по крайней мере $12 + 12 + 12 = 36$, то есть количество рёбер в таком графе не менее $36:2 = 18$.

Критерии. Правильно указана конструкция примера — 3 балла. Доказано, что число сообщений не меньше 18 — ещё 4 балла. Арифметическая ошибка при подсчёте числа рёбер — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

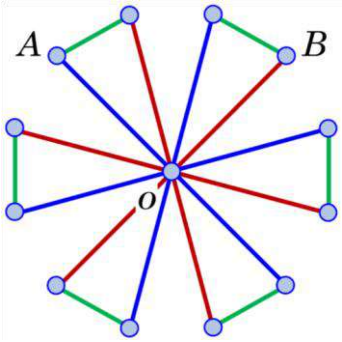

Рис. 4

4. Найдите все значения p и q такие, что для любого $x \in [-2;2]$ будет справедливо неравенство

$$|x^2 + px + q| \leqslant 2.$$

Ответ: $p = 0$, $q = -2$.

Решение. Пусть числа p и q удовлетворяют условию задачи. Подставляя последовательно значения $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$ из промежутка $[-2;2]$, получаем, что p и q удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} -2 \leqslant q \leqslant 2, \\ -2 \leqslant 4 + 2p + q \leqslant 2, \\ -2 \leqslant 4 - 2p + q \leqslant 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant q \leqslant 2, \\ -6 \leqslant q + 2p \leqslant -2, \\ -6 \leqslant q - 2p \leqslant -2. \end{cases}$$

Сложив почленно два последних неравенства, получим $-6 \leqslant q \leqslant -2$. Отсюда и из первого неравенства следует, что $q = -2$. Тогда p удовлетворяет неравенствам $-2 \leqslant p \leqslant 0$ и $0 \leqslant p \leqslant 2$, и поэтому $p = 0$. Таким образом, если существуют числа p и q, удовлетворяющие условию задачи, то $p = 0$, $q = -2$ и других решений нет.

Осталось доказать, что найденные значения $p = 0$, $q = -2$ являются решением задачи, то есть для любого $x \in [-2;2]$ выполняются неравенства $-2 \leqslant x^2 - 2 \leqslant 2 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 4$, которые, очевидно, справедливы.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказан один из двух фактов $p = 0$ или $q = -2$ — 2 балла. Найдены значения $p = 0$ и $q = -2$ — 5 баллов. Проверено, что значения $p = 0$ и $q = -2$ удовлетворяют условию — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. Окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга внешним образом в точке C и касаются внутренним образом окружности ω в точках A и B. Прямая AB вторично пересекает окружность ω_1 в точке D. Найдите величину угла BCD.

Ответ: 90°.

Решение. (Рис. 5.) Пусть O, O_1, O_2 — центры окружностей ω, ω_1, ω_2, соответственно. Тогда точки O_1 и O_2

расположены на сторонах равнобедренного треугольника AOB. Треугольник AO_1D также равнобедренный, поэтому $\angle ADO_1 = \angle ABO$, откуда $O_1D \parallel OB$.

Пусть прямая DC пересекает вторично ω_2 в точке E. Так как C лежит на линии центров O_1O_2, из равнобедренных треугольников DO_1C и EO_2C имеем

$$\angle EDO_1 = \angle O_1CD = \angle O_2CE = \angle O_2ED,$$

откуда $O_1D \parallel O_2E$. (Эту параллельность можно получить и по-другому, рассматривая гомотетию с центром в C, переводящую ω_1 в ω_2.)

Таким образом, точка E лежит на прямой BO_2. Значит, BE — диаметр окружности ω_2 и $\angle BCE = = 90^\circ$. Отсюда $\angle BCD = 90^\circ$.

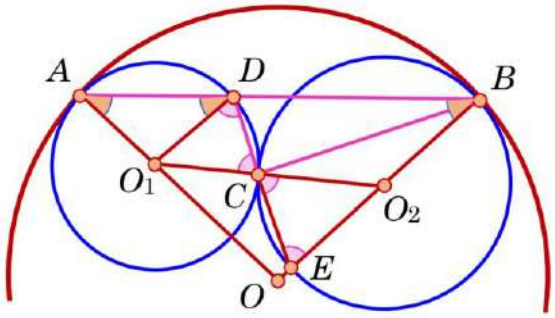

Рис. 5

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказана параллельность O_1D и OB — 2 балла. Доказана параллельность O_1D и O_2E — ещё 2 балла. Доказано, что точка E лежит на прямой OB — ещё 1 балл. Полное решение — 7 баллов.