

**Ключи к заданиям муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников
2024/2025 учебного года
по математике
10 класс**

**Методические рекомендации
для жюри муниципального этапа олимпиады
по оцениванию работ участников**

Общие критерии оценок приводятся в следующей достаточно условной таблице. К некоторым задачам имеются дополнительные комментарии к оцениванию.

Оценка	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрено отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1 – 2	Решения нет, но есть некоторые продвижения, которые являются частью решения.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). Дан ответ к задаче без обоснования, если этот ответ не подсказан условием, не является очевидным и может задать направление поиска решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует.

1. Любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты.
2. Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.
3. Баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи.
4. Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Условия и решения задач

10.1 Миллион представлен как сумма двух натуральных слагаемых, каждое из которых делится на сумму цифр другого. Докажите, что слагаемые чётны.

Решение. Обозначим натуральные слагаемые буквами A и B , тогда исходное условие примет вид

$$1000000 = A + B.$$

Количество цифр в каждом из слагаемых не может быть больше шести, поэтому можем представить числа A и B в виде:

$$A = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}, \quad B = \overline{b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6},$$

где $a_i, b_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Числа A и B не могут быть разной чётности, иначе их сумма была бы нечётной.

Предположим, что они нечётные, тогда a_6 и b_6 нечётные.

Рассмотрим суммы цифр, стоящих на одинаковых местах:

$$a_6 + b_6 = 10, \quad a_5 + b_5 = 9, \dots, a_1 + b_1 = 9.$$

Следовательно, при $1 \leq i \leq 5$ одно из чисел a_i и b_i чётное, а другое — нечётное. Другими словами, если среди чисел a_i при $1 \leq i \leq 5$ имеется k нечётных, то среди чисел b_i при $1 \leq i \leq 5$ нечётных будет $5 - k$.

Так как мы предположили, что нечётны оба числа a_6 и b_6 , то суммы

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) \quad \text{и} \quad (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6)$$

имеют разную чётность, и нечётные числа A и B не могут делиться на то из них, которое чётное. Противоречие.

Оба числа A и B могут быть чётными, например $A = B = 500\,000$.

□

Комментарий. Доказательство невозможности нечётных слагаемых — 6 баллов.

10.2 Определите наименьшее возможное значение выражения

$$\sqrt{2x - 3y - 1} + \sqrt{x + 2y + 4} + \sqrt{5y - x}.$$

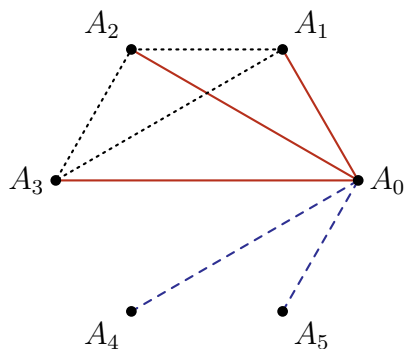
Ответ: $\sqrt{5}$.

Решение. Обозначим выражения под первым и третьим корнями соответственно через a и b . Тогда выражение под вторым корнем оказывается равным $a + b + 5$.

Так как a и b неотрицательны, наименьшее значение исходного выражения достигается при $a = b = 0$ ($x = \frac{5}{7}$, $y = \frac{1}{7}$). В этом случае выражение принимает значение $\sqrt{5}$. □

10.3 Каждую сторону и каждую диагональ выпуклого шестиугольника покрасили в один из двух цветов — красный или синий. Докажите, что найдётся хотя бы один треугольник, образованный тремя вершинами и отрезками между ними, такой, что все его стороны окрашены в один цвет.

Решение. Обозначим вершины шестиугольника $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$. Рассмотрим отрезки, соединяющие эти точки. Для наглядности будем обозначать красные отрезки сплошной линией, а синие — пунктирной линией, как показано на диаграмме.



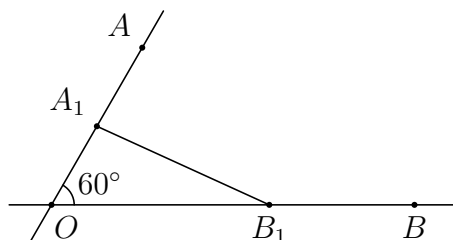
Рассмотрим пять отрезков, исходящих из точки A_0 : A_0A_1 , A_0A_2 , A_0A_3 , A_0A_4 , A_0A_5 . Каждый из этих отрезков окрашен либо в красный, либо в синий цвет. По принципу Дирихле, среди них обязательно найдутся как минимум три отрезка одного цвета. Без ограничения общности можно предположить, что три из них красные, а именно A_0A_1 , A_0A_2 , и A_0A_3 .

Теперь рассмотрим треугольник, образованный точками A_1 , A_2 и A_3 . Если хотя бы одна его сторона красная, то существует красный треугольник, то есть все его стороны красные. В противном случае все три стороны треугольника $A_1A_2A_3$ синие, и тогда утверждение задачи также выполняется. $\square$

10.4 Два железнодорожных пути пересекаются в точке O под углом 60° . К месту пересечения выезжают одновременно два поезда: пассажирский со станции A , находящейся в 30 км, и товарный со станции B — в 60 км от точки O . Пассажирский поезд идёт со скоростью 60 км/ч, а товарный — 30 км/ч. Через сколько времени поезда будут на наименьшем расстоянии друг от друга? Чему равно это расстояние?

Ответ: через $\frac{1}{2}$ часа, расстояние 45 км.

Решение. Через t часов после выезда поезда окажутся в точках A_1 и B_1 соответственно. Поскольку пассажирский поезд будет в точке O через полчаса, то $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.



Расстояние между ними, по теореме косинусов для треугольника OA_1B_1 , будет равно

$$A_1B_1 = \sqrt{(30 - 60t)^2 + (60 - 30t)^2 - 2(30 - 60t)(60 - 30t) \cos 60^\circ}.$$

Упростим выражение:

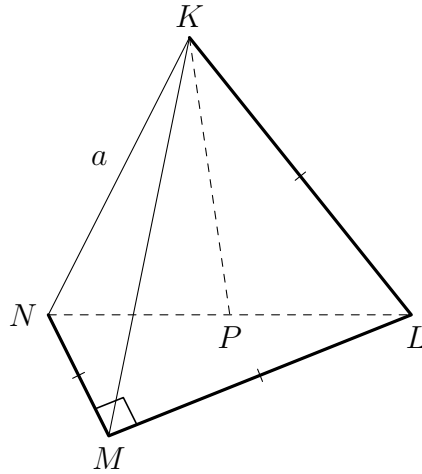
$$A_1B_1 = 30\sqrt{3(t^2 - t + 1)} = 30\sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

Расстояние между поездами будет наименьшим через $t = \frac{1}{2}$ часа и будет равно 45 км. $\square$

10.5 Пусть $KLMN$ — трёхзвенная ломанная в пространстве, причём $KL = LM = MN$ и угол $\angle LMN = 90^\circ$. Найдите расстояние от K до середины LN , если $KN = a$.

Ответ: $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Решение. Обозначим через P середину LN . Пусть $KL = LM = MN = x$. Поскольку



треугольник LMN прямоугольный и равнобедренный, то $NL = \sqrt{2}x$ и $LP = \frac{\sqrt{2}}{2}x$. Тогда $\frac{NL}{KL} = \frac{KL}{PL} = \sqrt{2}$, и, поскольку в треугольниках KLN и PLK угол L общий, то они подобны. Таким образом, $\frac{KN}{KP} = \sqrt{2}$, поэтому $KP = \frac{a}{\sqrt{2}}$. $\square$