

10 класс

1. Функция f задана формулой $f(x) = \frac{\frac{1-5x}{1+5x} + \frac{1+x^5}{1-x^5}}{\frac{1+5x}{1-5x} + \frac{1-x^5}{1+x^5}}$. Найдите произведение $f(2024) \cdot f(-2024)$.

Ответ: 1.

Решение. Прямое вычисление показывает, что $f(-x) = 1/f(x)$. Поэтому $f(-x) \cdot f(x) = 1$ при любом x .

Критерии оценки.

- 1) Если вычисления проведены только для $x = 2024$ — баллы не снимать.
2. Даны 2024 числа: 1, 11, 111, ..., $\underbrace{11 \dots 11}_{2024}$. Сколько среди них чисел, делящихся на 7?

Ответ: 337.

Решение. Покажем, что число, записываемое k единицами, делится на 7 тогда и только тогда, когда k делится на 6. Непосредственно проверяется, что числа 1, 11, 111, 1111 и 11111 на 7 не делятся, а 111111 делится. В общем случае если в записи числа $a = 1 \dots 1$ используется $6n + r$ единиц, то, разделив его «уголком» на 111111, получим остаток, записываемый r единицами. Так как 111111 делится на 7, то a делится на 7 тогда и только тогда, когда на 7 делится этот остаток, то есть при $r = 0$. Таким образом, в ряду 1, 11, 111, ..., на 7 делится каждое шестое число. Так как $2024 = 6 \cdot 337 + 2$, то таких чисел в этом ряду 337.

Критерии оценки.

- 1) Показано, что числа 1, 11, 111, 1111 и 11111 на 7 не делятся, а 111111 делится — 2 балла.
3. В параллелограмме $ABCD$, у которого $AB = 2AD$ и $\angle BAD = 60^\circ$, проведены биссектрисы всех углов. Пересекаясь, они образуют четырёхугольник. Найдите

- а) углы этого четырёхугольника;
- б) отношение площади четырёхугольника к площади параллелограмма.

Ответ: а) Все углы равны 90° . б) $\frac{1}{4}$.

Решение. а) Пусть биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке E . Тогда $\angle EAB + \angle EBA = (\angle DAB + \angle CBA)/2 = 90^\circ$, откуда $\angle AEB = 90^\circ$. Аналогично с остальными парами биссектрис смежных углов параллелограмма.

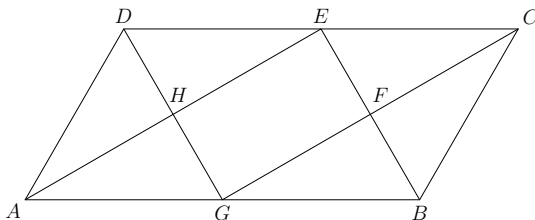


Рис. 5

б) Обозначим через E середину стороны CD . Тогда $AD = AB/2 = DE = EC = CB$, откуда $\angle EAD = \angle AED = (180^\circ - \angle ADE)/2 = \angle BAD/2$. Аналогично проверяется, что $\angle EBC = \angle CBA/2$. Таким образом, биссектрисы углов A и D пересекаются в точке E . Аналогично биссектрисы углов C и B пересекаются в середине G стороны AB . Рассмотрим образованный биссектрисами прямоугольник $EFGH$ (рис. 5). Очевидно, EF и EH — средние линии треугольника DGC . Поэтому $S_{EFGH} = S_{DGC} - S_{EFC} - S_{DHE} = S_{DGC}/2 = S_{ABCD}/4$.

Критерии оценки.

- 1) Доказано, что точки E и G лежат на сторонах параллелограмма — 2 балла.
 - 2) Выполнен п. а) — 2 балла.
 - 3) Выполнен п. б) — 3 балла.
4. Можно ли из 6 стальных прутов длиной по 1 м вырезать заготовки так, чтобы получилось 20 заготовок длиной по 21 см, 9 — длиной по 12 см,

4 — длиной по 9 см и 11 — длиной по 3 см (толщиной распилов пренебрегаем)?

Ответ: нельзя.

Решение. Казалось бы, можно: сумма длин прутков 600 см, а суммарная длина заготовок — 597 см. Но, поскольку длины всех заготовок делятся на 3, при распиливании каждого прута мы сможем использовать не больше 99 см его длины. Таким образом, мы сможем распилить на заготовки не больше $99 \cdot 6 = 594$ см длины прутков, а это уже меньше, чем 597.

Критерии оценки.

- 1) Правильный ответ без обоснования — 0 баллов.
5. В турнире участвуют 6 команд, каждая играет с каждой один раз. За победу даётся 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0. Может ли случиться, что в итоге турнира какие-то три команды в совокупности наберут на 4 очка больше, чем остальные три, если
 - а) турнир футбольный;
 - б) турнир волейбольный (ничьих не бывает)?

Ответ: а) может; б) не может.

	1	2	3	4	5	6	Сумма
1	X	2	2	2	2	2	10
2	0	X	0	2	2	2	6
3	0	2	X	1	0	2	5
4	0	0	1	X	1	2	4
5	0	0	2	1	X	1	4
6	0	0	0	0	1	X	1

Рис. 6

Решение. а) На рис. 6 представлена турнирная таблица, в которой 1-я, 2-я и 6-я команды набрали 17 очков, а 3-я, 4-я и 5-я команды набрали 13 очков.

б) 6 команд сыграют в турнире $6 \cdot 5/2 = 15$ игр. Всего в них разыгрывается $15 \cdot 2 = 30$ очков. Если какие-то три команды набрали вместе x очков, а три остальных — $x - 4$ очков, то $2x - 4 = 30$ и $x = 17$. Но любая сумма очков в волейболе — чётное число, так что описанная ситуация невозможна.

Критерии оценки.

- 1) Приведена турнирная таблица, отвечающая условиям п. а) — 3 балла.
- 2) Правильный ответ в п. б) без обоснования — 0 баллов.