ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Муниципальный этап-2024

Ответы и решения

10 класс

10.1. Ответ: не существуют.

Решение: Пусть такие пять чисел существуют, и эти числа n-2, n-1, n, n+1, n+2. Заметим, среди пяти последовательных натуральных чисел есть число, делящееся на 5. Следовательно, их произведение делится на 5. Сумма этих пяти чисел равна $5n$, т.е. тоже делится на 5. Значит, если к сумме этих пяти чисел прибавить их произведение, то результат будет делиться на 5. Но число, заканчивающееся на 2024, на 5 не делится – противоречие.

10.2. Доказательство: Пусть числа a, b, a^2 входят в прогрессию. Тогда $b = a + nd,\ a^2 = a + md$. Отсюда, $b - a = nd$, $b^2 = a^2 + b^2 - a^2 = a^2 + (b-a)(b+a) = a + md + nd(b+a) = a + kd$, т.е. b^2 также входит в прогрессию.

10.3. Доказательство: Данные 9 точек лежат на четырех прямых параллельных прямой a, значит, на одной из них – прямой c – по крайней мере 3 точки. Но, никакие 2 из 3 точек не могут оказаться на одной прямой, параллельной b, так как по условию прямая b не параллельна прямой a. Значит, все три прямые, параллельные b, пересекают c. Это означает, что они лежат в одной плоскости.

10.4. Ответ: $\frac{3}{2}$.

Решение: Рассмотрим плоскость AD_1C_1B. Так как прямая l проходит через середину ребра C_1D_1 и пересекает прямую AD_1, она имеет с этой плоскостью две общие точки, а значит, целиком принадлежит этой плоскости. В то же время прямая A_1B лежит в плоскости AA_1B_1B. Поэтому точка пересечения прямых l и A_1B лежит на линии пересечения плоскостей AD_1C_1B и AA_1B_1B, т.е. на прямой AB. Но в то же время она принадлежит прямой A_1B, а значит, совпадает с точкой пересечения прямых l и A_1B, т.е. с точкой B. Итак, мы должны найти расстояние между точками E и B. Но это легко делается с помощью теоремы Пифагора: $BE = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$.

10.5. Ответ: Выигрывает второй.

Решение: Укажем выигрышную стратегию второго игрока. Разобьем клетки доски на пары так, как показано на рисунке. И на любой ход первого числом x в одну их клеток какой-то пары второй должен поставить во вторую клетку пары число $9 - x$ (очевидно, что он всегда может это сделать). Тогда вдоль любой из сторон квадрата будут стоять числа a, 9-a и b ($1 \leq b \leq 9$). Их сумма больше 9, но меньше 18. А в любой тройке, содержащей 0 (диагональной, вертикальной или горизонтальной), два оставшихся числа в сумме не будут давать 9 (так как числа, дающие в сумме 9, стоят рядом).