

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
возрастная группа (10 класс)

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимальная оценка – 35 баллов.

ЗАДАНИЯ

Задание 1.

Рабочий день на предприятии составлял 8 часов. При этом первые шесть часов производительность труда была плановой, а затем падала на 25%. Директор (по согласованию с трудовым коллективом) продлил смену на час. При этом оказалось, что снова первые шесть часов работали с плановой производительностью, а затем она падала на 30%. На сколько процентов увеличилась общая производительность труда за смену в результате увеличения рабочего дня?

Правильный ответ.

На 8 процентов.

Решение.

Возьмём за 1 плановую производительность труда (объём работы, выполняемый за 1 час). Тогда до удлинения смены рабочие выполняли за смену $6+1,5=7,5$ единиц работы. А после удлинения $8+2,1=8,1$ единиц. Значит, общая производительность за смену стала составлять $8,1:7,5 \times 100\% = 108\%$ от исходной, то есть увеличилась на 8%.

Оценка задания.

Верное решение – 7 баллов. Первоначальная и окончательная производительность за смену верно выражена в условных единицах, но в процентах соотношение выражено неверно – 4 балла. В остальных случаях – 0 баллов.

Задание 2.

Для трех чисел a , b и c выполняется равенство:

$$\frac{a-c}{b+c} + \frac{b-a}{a+c} + \frac{c-b}{a+b} = 1.$$

Найдите значение выражения:

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+c} + \frac{a+c}{a+b}.$$

Правильный ответ.

4.

Решение.

Рассмотрим разность

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} - \left(\frac{a-c}{b+c} + \frac{b-a}{a+c} + \frac{c-b}{a+b} \right) = \frac{b+c}{b+c} + \frac{a+c}{a+c} + \frac{a+b}{a+b} = 3.$$

Значит, искомое выражение равно 4.

Оценка задания.

Верное решение – 7 баллов, в остальных случаях – 0 баллов.

Задание 3.

В трапецию $ABCD$ с основаниями $BC = 3$ и $AD = 5$ можно как вписать окружность, так и описать окружность около неё. Вписанная окружность с центром O касается боковых сторон AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите площадь пятиугольника $BCFOE$.

Правильный ответ.

$$\frac{3\sqrt{15}}{2}.$$

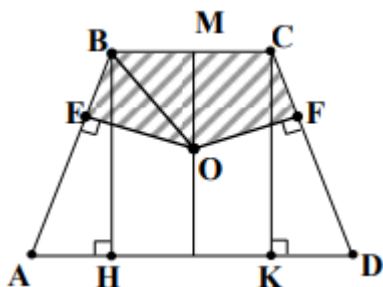
Решение.

Так как в трапецию можно вписать окружность, то $AB + CD = BC + AD = 8$. Из того, что окружность можно описать, следует равнобедренность трапеции, значит $AB = CD = 4$. Проведём высоты BH и CK , тогда $AH = KD = 1$. Из треугольника ABH находим катет $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{15}$, это высота трапеции и диаметр вписанной окружности. Значит,

$$r = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

радиус вписанной окружности равен $\frac{\sqrt{15}}{2}$. Радиусы OE , OM , OF перпендикулярны соответствующим сторонам трапеции (см. рисунок). Треугольники BOE и BMO равны по гипотенузе и катету, аналогично треугольники COM и CFO . Кроме того, равны треугольники BMO и MCO по общему катету и острому углу (BO и CO – биссектрисы равных углов трапеции). Таким образом, площадь пятиугольника $BCFOE$ равна

$$4S_{BMO} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{1}{2} BC = \frac{3\sqrt{15}}{2}.$$



Оценка задания.

Верное решение – 7 баллов, решение в целом верное, но неверный ответ из-за арифметической ошибки – 5 баллов, найден радиус вписанной окружности – 1 балл, в остальных случаях – 0 баллов.

Задание 4.

В школьной викторине участвовали 100 учеников. После подведения итогов оказалось, что любые 66 из них вместе заработали не менее 50% от общего количества призовых очков. Какой наибольший процент очков мог заработать один участник викторины?

Правильный ответ.

25%.

Решение.

Допустим участник X набрал наибольший процент очков – $x\%$. Разобьём остальных участников на три группы A , B и C по 33 человека. Пусть в этих группах суммарно участники набрали соответственно a , b и c процентов очков. Тогда

$$2(100 - x) = 2(a + b + c) = (a + b) + (a + c) + (b + c) \geq 50 + 50 + 50 = 150.$$

Следовательно, $x \leq 25$.

Приведём пример, при котором максимальный процент будет равен 25. Если бы каждый из участников, кроме X , заработал $\frac{75}{99} = \frac{25}{33}\%$ всех очков, то любые 66 из них суммарно набрали бы 50%, а сам X – 25% всех очков.

Оценка задания.

Верное обоснованное решение – **7 баллов**, только доказана оценка «не более 25%» – **4 балла**, только приведен подходящий пример – **3 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

Задание 5.

Два брата продали стадо овец, выручив за каждую овцу столько рублей, сколько было в стаде овец. Желая разделить выручку поровну, они стали по очереди, начиная со старшего брата, брать из общей суммы по 10 рублей. После того, как старший брат в очередной раз взял 10 рублей, младшему осталось меньше 10 рублей. Чтобы обеспечить равный делёж, старший брат отдал младшему свой нож. Во сколько рублей был оценён нож?

Правильный ответ.

2 рубля.

Решение.

Пусть в стаде было n овец. Тогда братья выручили n^2 рублей. Из условия следует, что количество десятков в числе n^2 нечётно. Представим число n в виде $10k+m$, где k – количество десятков, а m – количество единиц в нём. Тогда $n^2 = 100k^2 + 20km + m^2$. Таким образом, нечётность количества десятков в числе n^2 равносильна нечётности количества десятков в числе m^2 . Перебирая квадраты однозначных чисел, убеждаемся, что количество десятков нечётно только у 4^2 и 6^2 . Число n^2 в обоих этих случаях оканчивается на 6, то есть при дележе денег младший брат получил на 4 рубля меньше старшего. Чтобы в этой ситуации обеспечить равный делёж, старший брат должен передать младшему 2 рубля.

Оценка задания.

Верное решение – **7 баллов**. Установлен факт про нечётность количества десятков m^2 – **2 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.