ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

11-й класс

Решения задач

11.1. Представим все множители, кроме последнего, в следующем виде:

$$\log_{2002} 2001 = \frac{\log_{2025} 2001}{\log_{2025} 2002},$$

$$\log_{2003} 2002 = \frac{\log_{2025} 2002}{\log_{2025} 2003},$$

...

$$log_{2024} 2023 = \frac{log_{2025} 2023}{log_{2025} 2024}.$$

Тогда

$$a = \log_{2002} 2001 \cdot \log_{2003} 2002 \cdot \ldots \cdot \log_{2024} 2023 \cdot \log_{2025} 2024 =$$

$$= \frac{\log_{2025} 2001}{\log_{2025} 2002} \cdot \frac{\log_{2025} 2002}{\log_{2025} 2003} \cdot \ldots \cdot \frac{\log_{2025} 2023}{\log_{2025} 2024} \cdot \log_{2025} 2024 = \log_{2025} 2001.$$

Ответ: $a = \log_{2025} 2001$.

11.2. Умножим обе части уравнения на выражение, сопряжённое левой части:

1+ x + x^2- 1 + x - x^2 = $2(\sqrt{1+x+x^2}$ -$\sqrt{1-x+x^2}$). После упрощения получим:

$x =\sqrt{1+x+x^2}$ -$\sqrt{1-x+x^2}$. Данное уравнение сложим с исходным. В результате получим $2\sqrt{1+x+x^2}$ = 2 + x. Возведём обе части уравнения в квадрат и получим уравнение: 4 + 4x + 4x^2 = 4 + 4x + x^2, из которого находим единственный корень уравнения x = 0.

Ответ: x = 0.

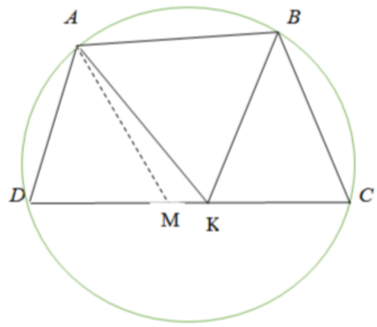
11.3. Обозначим численность самцов через n, а самок – через m, общий вес самцов через x, а самок – через y. Тогда $\frac{n}{m} = \frac{45}{55}, \frac{x}{y} = \frac{55}{45}$. Средний вес самца вычисляется по формуле $\frac{x}{n}$, а средний вес самки – по формуле $\frac{y}{m}$.

Разделим первую дробь на вторую и учтём, что $\frac{n}{m} = \frac{45}{55}, \frac{x}{y} = \frac{55}{45}$. Тогда получим:

$$\frac{x}{n} : \frac{y}{m} = \frac{x \cdot m}{n \cdot y} = \frac{x}{y} \cdot \frac{m}{n} = \frac{55}{45} \cdot \frac{55}{45} = \frac{121}{81}.$$

Ответ: В $\frac{121}{81}$ раза.

11.4. Возьмём на стороне *CD* точку *K* так, чтобы *DK* = *AD*, *KC* = *BC* (смотри рисунок) и опишем около треугольника *ABK* окружность.



Пусть *M* – вторая точка пересечения этой окружности с *CD*. Докажем, что *AM* и *BM* – биссектрисы соответствующих углов.

1. Докажем, что *AM* – биссектриса угла *A*. Так как четырёхугольник *MABK* вписан в описанную около треугольника *ABK* окружность, то $\angle BAM + \angle BKM = 180°$. Но $\angle BKC = 180° - \angle BKM$. Из данных двух равенств получаем, что $\angle BAM = \angle BKC$. Найдём $\angle BKC$. Так как треугольник *BKC* равнобедренный (по построению) и четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность (по условию), то $\angle BKC = \frac{180° - \angle C}{2} = 90° - \frac{1}{2}(180° - \angle A) = \frac{1}{2}\angle A$. Таким образом, $\angle BAM = \angle BKC = \frac{1}{2}\angle A$, то есть *AM* – биссектриса угла *A*.

2. Докажем, что *BM* – биссектриса угла *B*. $\angle ABM = \angle MKA$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу *AM*). Но так как треугольник *ADK* равнобедренный (по построению) и *ABCD* – вписанный в окружность четырехугольник (по условию), то имеем:

$\angle ABM = \angle MKA = \angle DKA = \frac{180° - \angle D}{2} = 90° - \frac{1}{2}(180° - \angle B) = \frac{1}{2}\angle B$. Таким образом, $\angle ABM = \angle MKA = \frac{1}{2}\angle B$,
то есть BM – биссектриса угла B.

11.5. Число z больше 2, так как в противном случае при z = 2 получим x = 1, которое не является простым числом. Так как простым числом среди чётных чисел является лишь число 2, то число z является числом нечётным. Тогда получим, что x^y – число чётное. Поэтому x – число чётное, то есть $x = 2$. Получаем уравнение: $2^y + 1 = z$. Число y может быть чётным или нечётным. Рассмотрим эти два случая.

1. Пусть y – чётное число. Так, единственным простым чётным числом является число 2, то $y = 2$. Поэтому $z = 5$. Таким образом, получили решение уравнения: $x = 2$, $y = 2$, $z = 5$.

2. Пусть y – нечётное число. Тогда число $2^y + 1$ будет делиться на 3 (данный факт можно доказать, например, методом математической индукции), при этом частное будет больше 1. А значит, число z будет составным. Таким образом, быть нечётным y не может. Значит, имеем одно решение.

Ответ: (2; 2; 5).