

11 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

Задача 1. Найдите все натуральные n такие, что $n+2S(n)=2025$, где $S(n)$ – сумма цифр числа n .

Решение: Если $n < 1000$, то $n+2S(n) < 1000+2 \cdot 9 \cdot 3 = 1054$. Значит n состоит из 4 цифр, пусть $n=1000a+100b+10c+d$, где a, b, c, d – цифры, а не равно 0. Получаем уравнение: $1002a + 102b + 12c + 3d = 2025$, поделим на 3 получим: $334a + 34b + 4c + d = 675$

Возможно 2 варианта $a=1$ или $a=2$.

В первом случае: $34b+4c+d=341$, при $b < 9$ решений нет, при $b=9$ получаем: $4c+d=35$, чтобы 35- d делились на 4 есть два варианта 3 и 7. Получили 2 решения 1977, 1983.

Во втором случае $34b+4c+d=7$, видим что $b=0$, получаем $4c+d=7$, имеет 2 решения $c=0, d=7$ и $c=1, d=3$. Получили решения 2007, 2013.

Ответ: 1977, 1983, 2007, 2013

Критерии.

1 балл за каждую пару найденных ответов

5 баллов за доказательство, что других ответов нет

3 балла, если не рассмотрен случай, что 1 на первом месте

7 баллов за полное решение

Задача 2. После товарищеского матча по футболу две команды (каждая из которых состоит из 18 игроков, включая 2 вратарей и запасных игроков) решили поехать на озеро искупаться. Им предоставили два автобуса вместимостью 18 человек каждый. Игроки двух команд расселись в эти два автобуса случайным образом. Найдите вероятность того, что в каждом из автобусов оказалось ровно по 2 вратаря.

Решение. Найдем число способов рассадки 4 вратарей в автобусы. Первый вратарь может сесть на любое из 36 мест. Второй вратарь на любое из оставшихся 35 мест, но если он сел на одно из 17 мест в автобусе с первым вратарем, то 3ий и

4-й вратарь должны садиться в другой автобус – для этого $18 \cdot 17$ вариантов. Если второй вратарь сел в другой автобус то для третьего есть 34 варианта, а для четвертого всего 17. Получили $36 \cdot (17 \cdot 18 \cdot 17 + 18 \cdot 34 \cdot 17)$ вариантов посадки вратарей. Остальных игроков можно посадить $32!$ способами. Всего вариантов посадить 36 игроков – $36!$. Вероятность равна $P = \frac{36 \cdot (17 \cdot 18 \cdot 17 + 18 \cdot 34 \cdot 17) \cdot 32!}{36!} = \frac{17 \cdot 18 \cdot 17 + 18 \cdot 34 \cdot 17}{35 \cdot 34 \cdot 33} = \frac{153}{385}$.

Ответ: $\frac{153}{385}$.

Критерии.

1 балл – найдено общее количество рассадок всех игроков,

5 балла – найдено количество рассадок, при которых по 2 вратаря сидят в каждом автобусе,

7 баллов за полное решение

Задача 3. Задан многочлен $P(x) = x^2 - a$, при всех a найти многочлен $Q(x)$ 4-й степени, коммутирующий с $P(x)$, т.е. такой что $P(Q(x)) = Q(P(x))$ при всех x .

Решение. Пусть $Q(x) = bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, тогда $P(Q(x)) = (bx^4 + \dots)^2 - a = b^2x^8 + \dots$, $Q(P(x)) = b(x^2 - a)^4 + \dots = bx^8 + \dots$, здесь через многоточие обозначены слагаемые с младшими степенями видим, что $b = 1$.

Для 7 степени имеем: $P(Q(x)) = (x^4 + cx^3 + \dots)^2 - a = x^8 + 2cx^7 + \dots$, $Q(P(x)) = (x^2 - a)^4 + c(x^2 - a)^3 \dots = bx^8 + 0x^7 + \dots$, поэтому $c = 0$.

Для 6 степени получим: $P(Q(x)) = (x^4 + dx^2 + \dots)^2 - a = x^8 + 2dx^6 + \dots$, $Q(P(x)) = (x^2 - a)^4 + d(x^2 - a)^2 \dots = bx^8 - 4ax^6 + \dots$, значит $d = -2a$.

Для 5 степени $P(Q(x)) = (x^4 - 2ax^2 + ex + f)^2 - a = x^8 - 4ax^6 + 2ex + \dots$, $Q(P(x)) = (x^2 - a)^4 - 2a(x^2 - a)^2 \dots = bx^8 - 4ax^6 + 0x^5 + \dots$, значит $e = 0$.

Далее для 4 степени $P(Q(x)) = (x^4 - 2ax^2 + f)^2 - a = x^8 - 4ax^6 + (4a^2 + 2f)x^4 + \dots$, $Q(P(x)) = (x^2 - a)^4 - 2a(x^2 - a)^2 + f = bx^8 - 4ax^6 + (6a^2 - 2a)x^4 + \dots$, значит $f = a^2 - a$.

Получили $Q(x) = x^4 - 2ax^2 + a^2 - a = (x^2 - a)^2 - a$, так как оказалось, что $Q(x) = P(P(x))$, то остальные степени проверять не требуется.

Критерии.

1 балл – за нахождения каждого из коэффициентов $Q(x)$,

2 балла показано, что получившийся полином удовлетворяет требуемому условию,

2 балла за угаданный ответ,

7 баллов за полное решение

Задача 4. В пространстве прямолинейно с постоянными (не обязательно равными) скоростями движутся три точки. В некоторый момент времени они не находились на одной прямой. Могут ли они после этого оказаться на одной прямой более двух раз?

Решение. Обозначим эти точки А, В и С. Предположим, что точки А, В, С могут оказаться на одной прямой более 2 раз. Тогда существует плоскость в которой проходит все движение. Рассмотрим декартову систему координат с началом в подвижной точке А, оси которой лежат в этой плоскости. В этой системе координат точки В и С движутся равномерно и прямолинейно. Уравнение траектории точки В: $\begin{cases} x_B = k_B t + l_B \\ y_B = m_B t + n_B \end{cases}$,

С: $\begin{cases} x_C = k_C t + l_C \\ y_C = m_C t + n_C \end{cases}$. Условие, что точки А, В и С окажутся на одной прямой:

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$, в координатной записи $\frac{x_B - 0}{y_B - 0} = \frac{x_C - 0}{y_C - 0}$.

То есть $\frac{k_B t + l_B}{m_B t + n_B} = \frac{k_C t + l_C}{m_C t + n_C}$. Это равенство представляет собой либо уравнение степени не больше двух либо выполнено тождественно. Поскольку в начальный момент времени А, В и С не находились на одной прямой, то второй вариант не реализуется. Значит, уравнение имеет не более двух корней.

Критерии.

2 балла – выбрана подвижная система координат и выписаны в этой системе уравнения движения двух точек;

3 балла – сформулировано условие, что три точки окажутся на одной прямой;

5 балла – задача сведена к анализу количества решений квадратного уравнения;

7 баллов за полное решение.

Задача 5. Дан правильный тетраэдр с ребром 1. Найдите наибольшую площадь его ортогональной (перпендикулярной) проекции на некоторую плоскость.

Решение. Пусть A', B', C', D' – ортогональные проекции вершин А, В, С, D тетраэдра. Рассмотрим два случая. Проекция тетраэдра ABCD может быть выпуклым четырёхугольником с вершинами A', B', C', D' или треугольником (если, например, точка D' находится внутри треугольника $A'B'C'$). В каждом из этих случаев найдем максимально возможную площадь проекции.

Пусть проекцией пирамиды является треугольник $A'B'C'$. В этом случае, $S_{A'B'C'} =$

$S_{ABC} \cos(\alpha)$, где α – угол между плоскостями $A'B'C'$ и ABC . Тогда наибольшая площадь достигается при $\alpha=0$ и равна $S_{A'B'C'} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Пусть проекция пирамиды – четырёхугольник (например, $A'B'C'D'$). Обозначим K, L, M, N середины ребер AB, BC, CD, DA , тогда K', L', M', N' – проекции этих точек являются серединами сторон $A'B', B'C', C'D', D'A'$. Заметим, что $KLMN$ – параллелограмм, стороны которого параллельны ребрам AC и BD , следовательно $K'L'M'N'$ тоже параллелограмм и $|K'L'|=|M'N'|=|A'C'|/2$. Выразим $S_{A'B'C'D'}$ через $S_{K'L'M'N'}$. Имеем, $S_{A'B'C'D'} = (|A'C'| h_1 + |A'C'| h_2)/2$, где h_1 и h_2 – высоты, опущенные из вершин B' и D' на $A'C'$. Тогда $h = (h_1 + h_2)/2$ равна высоте параллелограмма $K'L'M'N'$ и $S_{K'L'M'N'} = |K'L'|h = (|A'C'| h_1 + |A'C'| h_2)/2 = S_{A'B'C'D'}/2$. Следовательно, площадь проекции $S_{A'B'C'D'} = 2S_{KLMN} \cos(\alpha)$, где α – угол между плоскостью $KLMN$ и плоскостью проекции. Максимальная площадь проекции достигается при $\alpha=0$, то есть когда плоскость параллельна скрещивающимся ребрам AC и BD . Очевидно, что $S_{A'B'C'D'} = 2S_{KLMN} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2}$, и это больше, чем было получено для случая треугольника. Таким образом, максимально возможная площадь проекции равна $\frac{1}{2}$.

Критерии.

1-2 балла – верный ответ, обоснование отсутствует;

2 балла – найдена и обоснована максимальная площадь для случая треугольной проекции;

4 балла – показано, что во втором случае максимальная площадь проекции тетраэдра достигается когда плоскость параллельна скрещивающимся ребрам;

7- полное решение.

Задача 6. Найдите уравнение третьей степени с целыми коэффициентами, которое имеет корни $\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{8\pi}{7}$ (требуется явно найти коэффициенты уравнения).

Решение. Способ 1. Обозначим $\alpha = \frac{2\pi}{7}$. По теореме Виета для кубического уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
 -a &= \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} = \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \left(2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} \right) \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \left(\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} \right) = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{10\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{12\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \right) \\
 &= \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

$$\text{так как } \cos \frac{6\pi}{7} = \cos \frac{8\pi}{7}, \cos \frac{12\pi}{7} = \cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{10\pi}{7} = \cos \frac{4\pi}{7},$$

$$-c = \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} = \frac{\sin \frac{16\pi}{7}}{8 \sin \frac{2\pi}{7}} = \frac{1}{8}.$$

Получили уравнение $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$, умножим на 8 и получим целые коэффициенты $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$.

2 способ. Углы $\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}$ удовлетворяют уравнению $\cos 6\alpha = \cos \alpha$, используя формулы косинуса двойного и тройного угла, получаем уравнение шестой степени относительно $x = \cos \alpha$:

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - x - 1 = 0.$$

Найдем лишние корни этого уравнения. Так как $\cos(6 \cdot 0) = \cos 0$, то один из корней этого уравнения $x_4 = \cos 0 = 1$. Также заметим, что $\cos(6 \cdot \frac{2\pi}{5}) = \cos \frac{12\pi}{5} = \cos \frac{2\pi}{5}$ и $\cos(6 \cdot \frac{4\pi}{5}) = \cos \frac{24\pi}{5} = \cos \frac{4\pi}{5}$. Значит, уравнение шестой степени имеет корни $x_5 = \cos \frac{2\pi}{5}, x_6 = \cos \frac{4\pi}{5}$. Углы $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$ также удовлетворяют уравнению $\cos 4\alpha = \cos \alpha$, это уравнение в переменной $x = \cos \alpha$ принимает вид:

$$8x^4 - 8x^2 - x + 1 = 0,$$

Четвертый корень этого уравнения $x = -\frac{1}{2}$, он посторонний для уравнения шестой степени. Левая часть уравнения четвертой степени имеет множители $(x-1)(2x+1)$ поэтому получаем:

$$\begin{aligned}
8x^4 - 8x^2 - x + 1 &= 8x^2(x - 1)(x + 1) - (x - 1) = (x - 1)(8x^3 + 8x^2 - 1) \\
&= (x - 1)(4x^2(2x + 1) + 2x(2x + 1) - (2x + 1)) \\
&= (x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 2x - 1)
\end{aligned}$$

Значит левая часть уравнения шестой степени делится на $x - 1$ и $4x^2 + 2x - 1$, поделим на эти множители и останется искомое уравнение третьей степени:

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - x - 1 = (x - 1)(4x^2 + 2x - 1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)$$

Ответ: $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$

Критерии.

По 2 балла за каждый из коэффициентов уравнения,

2 балла- выписано уравнения через косинус кратного угла, из которого можно получить ответ (например, $\cos 6\alpha = \cos \alpha$, $\cos 7\alpha = 1$),

не менее 4 баллов, если правильно выписано уравнение более высокой степени.

7 баллов за полное решение.