

Условия и решения задач

11 класс

1. Докажите, что числа x, y, z имеют один и тот же знак тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:

$$xy + yz + zx > 0 \text{ и } \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} > 0.$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Обозначим $a = x + y + z$, $b = xy + yz + zx$, $c = xyz$. Тогда числа x, y, z являются корнями кубического уравнения

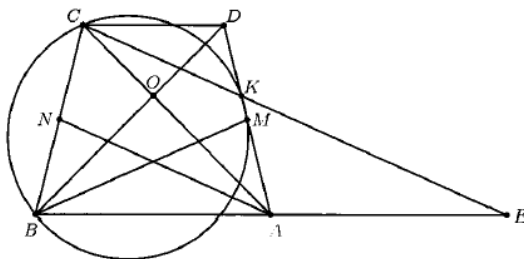
$$t^3 - at^2 + bt - c = 0.$$

По условию $b = xy + yz + zx > 0$ и $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \frac{x+y+z}{xyz} = \frac{a}{c} > 0$.

Таким образом, a и c одного знака. Если они оба положительны, то кубическое уравнение имеет все положительные корни (очевидно, что не может иметь отрицательных корней), если они оба отрицательны, то кубическое уравнение имеет все отрицательные корни. Утверждение доказано.

2. Пусть $ABCD$ равносторонняя трапеция, $AD=BC$, $AB \parallel CD$. Диагонали трапеции пересекаются в точке O , а точка M является серединой стороны AD . Окружность, описанная около треугольника BCM , во второй раз пересекает сторону AD в точке K . Докажите, что $OK \parallel AB$.

Доказательство. Пусть точка N является серединой стороны CB , а прямые AB и CK пересекаются в точке E (см. рисунок). Поскольку четырехугольник $MBCK$ вписанный, то $\angle AMB = \angle BCE$, а поскольку $ABCD$ равносторонняя трапеция, то $\angle AMB = \angle ANB$. По теореме Фалеса, $\frac{BN}{NC} = \frac{BA}{AE} = 1$, отсюда $BA = AE$. Поскольку $\triangle CDK \sim \triangle EAK$ и $\triangle COD \sim \triangle AOB$ имеем, что $\frac{DK}{KA} = \frac{CD}{AE} = \frac{CD}{AB} = \frac{DO}{OB}$. Отсюда имеем, что $OK \parallel AB$. Что и требовалось доказать.



3. Докажите, что среди произвольных десяти различных двузначных чисел можно выделить две разные группы чисел с одинаковой суммой так, что ни одно из чисел не может принадлежать обеим группам одновременно.

Доказательство. В решении задачи №5 для 10 класса доказано существование двух групп чисел X и Y , сумма чисел в которых одинаковая. Не все числа из группы X содержатся в группе Y , иначе бы сумма чисел группы Y была больше. Аналогично наоборот. Поэтому, если из обеих групп вычеркнуть числа, содержащиеся в обеих группах одновременно, то мы получим непустые группы X^* и Y^* , не имеющие общих элементов. При этом суммы чисел в этих новых группах X^* и Y^* будут равны. Что и требовалось доказать.

4. Решите неравенство:

$$\log_{1-\pi \sin^2 x \cos^2 x}(2x^2 - 3x + 1) \geq 0$$

Решение. Поскольку $\pi \sin^2 x \cos^2 x = \frac{\pi}{4} \sin^2 2x$, то при любых x основание логарифма принадлежит интервалу $(0, 1]$, причем $1 - \pi \sin^2 x \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0$. Поэтому для всех x , для которых $\sin 2x \neq 0$, данное неравенство эквивалентно неравенству $0 < 2x^2 - 3x + 1 \leq 1$. Данное двойное неравенство выполняется только при $x \in [0, \frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3}{2}]$. На отрезке $[0, \frac{3}{2}]$ есть только одно решение $x = 0$ уравнения $\sin 2x = 0$.

Ответ: $x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3}{2}]$.

5. Постройте график функции:

$$y = \sqrt{4 \sin^4 x - 2 \cos 2x + 3} + \sqrt{4 \cos^4 x + 2 \cos 2x + 3}.$$

Решение. Преобразуем функцию:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4 \sin^4 x - 2 \cos 2x + 3} + \sqrt{4 \cos^4 x + 2 \cos 2x + 3} = \\ &= \sqrt{4 \sin^4 x - 2(1 - 2 \sin^2 x) + 3} + \sqrt{4 \cos^4 x + 2(2 \cos^2 x - 1) + 3} = \\ &= \sqrt{4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 1} + \sqrt{4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 1} = \\ &= \sqrt{(2 \sin^2 x + 1)^2} + \sqrt{(2 \cos^2 x + 1)^2} = 2 \sin^2 x + 1 + 2 \cos^2 x + 1 = 4. \end{aligned}$$

График функции показан на рисунке.

