Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2024/2025 учебный год

Решения задач и критерии оценивания. 11 класс

11.1 *Найдите такой угол α, что*

$$\cos 2\alpha < \sin\alpha < \cos\alpha < \sin 2\alpha.$$

Решение: Возьмём такой угол α, что $30^\circ < \alpha < 45^\circ$. Тогда, используя убывание и возрастание cos и sin на отрезке от 0° до 90° получаем:

$$\cos 2\alpha < \cos 60^\circ = \sin 30^\circ < \sin\alpha < \sin 45^\circ = \cos 45^\circ < \cos\alpha < \cos 30^\circ = \sin 60^\circ < \sin 2\alpha.$$

Замечание. Решение задачи не требовало определить все такие углы. А найти подходящий можно было из следующих соображений: подставляя в неравенства «стандартные» углы, можно обнаружить, что для $\alpha = 30^\circ$ и $\alpha = 45^\circ$ выполняются нужные неравенства, но только нестрогие, поэтому разумно предположить, что если такой угол существует, то он между 30° и 45°.

Критерии:

- Найден угол, удовлетворяющий нестрогим неравенствам — 1 балл.

11.2 *Пусть a – какой-то один из корней уравнения $x^3 - 20x^2 - 24x + 25 = 0$. Найдите уравнение третьей степени с целыми коэффициентами такое, чтобы его корнем было число a^2.*

Решение: Приведём один из способов получения искомого уравнения. По условию $a^3 - 20a^2 - 24a + 25 = 0$, поэтому $a(a^2 - 24) = 20a^2 - 25$. Возведём это равенство в квадрат и получим $a^2(a^2 - 24)^2 = (20a^2 - 25)^2$, поэтому a^2 – это корень уравнения третьей степени с целыми коэффициентами $x(x - 24)^2 - (20x - 25)^2 = 0$. Или, после раскрытия скобок, $x^3 - 448x^2 + 1576x - 625 = 0$.

Замечание. Ответ в задаче однозначен с точностью до числового множителя.

Критерии:

- Ответ записан в виде полиномиального выражения без раскрытия скобок — баллы не снимать;
- Получено уравнение не третьей степени — 0 баллов;
- Получено уравнение, коэффициенты которого являются некоторыми выражениями, целочисленность которых не доказана — 0 баллов.

11.3 *Докажите, что найдётся натуральное число n такое, что*

$$n^n + (n+1)^n + (n+2)^n$$

делится на 2024.

Решение: Подходят, например, все натуральные числа n вида $2024k - 1$. Действительно, все такие n нечётны, поэтому по формуле сокращенного умножения

$$n^n + (n+2)^n = (n + (n+2))(n^{n-1} - n^{n-2}(n+2) + \cdots + (n+2)^{n-1}),$$

а потому $n^n + (n+2)^n$ делится на $n + (n+2) = 2(n+1) = 2024 \cdot 2k$. И слагаемое $(n+1)^n = (2024k)^n$ тоже делится на 2024.

Замечание. Существуют и другие подходящие n.

Критерии:

- Использование без доказательства известных теоретико-числовых фактов (малая теорема Ферма, формулы сокращённого умножения, модульная арифметика и т.д.) — баллы не снимать.

$\boxed{\mathbf{11.4}}$ *Докажите неравенство для всех $x > 0$:*

$$\frac{1}{x+x^2} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Решение 1: Заметим, что $\dfrac{1}{x+x^2} + \dfrac{x^2}{1+x} = \dfrac{x^3+1}{x^2+x} = \dfrac{x^2-x+1}{x} = \dfrac{x^2+1}{x} - 1$. Пусть $t = \dfrac{x^2+1}{x}$, тогда исходное неравенство эквивалентно $t + 1/t \geqslant 5/2$. Так как $1 + x^2 \geqslant 2x$, то $t \geqslant 2$. Функция $t + 1/t$ возрастает при $t > 1$, так как её производная $1 - 1/t^2 > 0$. Поэтому $t + 1/t \geqslant 2 + 1/2 = 5/2$.

Решение 2: После приведения к общему знаменателю и разложения на множители неравенство примет эквивалентную форму $\dfrac{(x-1)^2(2x^2-x+2)}{x(x^2+1)} \geqslant 0$, которое верно, т.к. $2x^2-x+2 > x^2-x+1 > x^2-2x+1 = (x-1)^2 \geqslant 0$.

Замечание. Неравенство задачи останется верным при замене 1, x и x^2 на произвольные положительные числа, поэтому возможны решения, доказывающие сразу обобщенный вид данного неравенства.

Критерии:

- Отсутствуют промежуточные преобразования и разложения при приведении к общему знаменателю (как в решении 2) — не больше 4 баллов.
- Использованы классические неравенства без доказательства (неравенство о средних, неравенство Коши-Буняковского, неравенство Йенсена и т.д.) — баллы не снимать.

$\boxed{\mathbf{11.5}}$ *В $\triangle ABC$ провели биссектрисы AA_1 и BB_1. Серединный перпендикуляр к AA_1 пересекает продолжение луча BB_1 за точку B_1 в точке D, а точка E – пересечение прямой DA_1 и AC. Докажите, что $CA_1 = CE$.*

Решение: Заметим, что серединный перпендикуляр к стороне треугольника и биссектриса, проведённая к этой стороне пересекаются в середине дуги описанной окружности этого треугольника, стянутой этой стороной. Действительно, эта точка равноудалена от концов стороны, поэтому лежит на серединном перпендикуляре, а так как это середина дуги, то углы, опирающиеся на половинки этой дуги, равны, т.е. середина лежит и на биссектрисе. Таким образом, в нашей задаче точка D – это середина дуги AA_1 описанной окружности $\triangle ABA_1$. Значит, четырёхугольник ABA_1D – вписанный, откуда для углов, опирающихся на дугу AD, получаем $\angle AA_1D = \angle ABD = \frac{1}{2}\angle B$. Осталось убедиться, что $\angle EA_1C = \angle A_1EC$. Действительно, $\angle EA_1C = \angle AA_1C - \angle AA_1D = (\frac{1}{2}\angle A + \angle B) - \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$. Зная два угла в $\triangle EA_1C$ находим третий оставшийся и это тоже будет $\frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$.

Критерии:

- Использован факт про точку пересечения серединного перпендикуляра и биссектрисы без доказательства — минус 1 балл;
- Если используется счётное решение (тригонометрия, координаты, комплексные числа), то без полных законченных выкладок — 0 баллов.