ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ.
2024-2025 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
11 КЛАСС

Задание 11.1. (7 баллов)

Решить уравнение $\sqrt{4-\sqrt{4-x^2}}=x$.

Ответ: *2;* $\sqrt{3}$.

Решение.

Имеем ограничение $x \geq 0$, при выполнении которого исходное уравнение равносильно уравнениям $4-\sqrt{4-x^2}=x^2$ или $4-x^2=\sqrt{4-x^2}$. Последнее равносильно совокупности $4-x^2=0$, $4-x^2=1$. С учетом ограничения имеем корни х=*2; x*=$\sqrt{3}$.

Ответ: *2;* $\sqrt{3}$.

Критерии оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Верный ответ, решение полностью аргументировано
5-6	Верный ответ, решение недостаточно обосновано
3-4	Потерян один из корней или допущена арифметическая ошибка
1-2	Выписано ОДЗ или ограничение при отсутствии или неверных ответах либо угадан один из корней
0	Если в ответе хотя бы один отрицательный корень

Задание 11.2. (7 баллов)

Вычислить сумму: $S=1^2+2^2-3^2-4^2+5^2+6^2-7^2-8^2+\cdots-2023^2-2024^2$.

Ответ: $-2024\cdot 2025=-4098600$.

Решение.

Имеем $S=1^2-(3-2)(3+2)+(5-4)(5+4)-(7-6)(7+6)+\cdots-(2023-2022)(2023+2022)-2024^2=1-5+9-13+17-\cdots-4045-2024^2=S_+-S_-$, где S_+ - сумма положительных слагаемых, S_- - число противоположное сумме отрицательных.

Далее, $S_+=1+9+17+\cdots+4041$ – сумма арифметической прогрессии из 506 членов (4041=1+$8\cdot 505$), отсюда

$$S_+=\frac{1+4041}{2}\cdot 506=2021\cdot 506,$$

$$S_- = 2024^2 + (5+13+21+\dots+4045) = 2024^2 + \frac{5+4045}{2}\cdot 506 = 2024^2 + 2025\cdot 506,$$

так как сумма в скобках - тоже сумма арифметической прогрессии из 506 членов. Итого, $S = 2021\cdot 506 - 2025\cdot 506 - 2024^2 = -4\ \cdot 506 - 2024^2 = -2024\cdot 2025$.

Ответ: $-2024\cdot 2025 = -4098600$.

Критерии оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное обоснованное решение
5-6	Ответ верный, решение не до конца обосновано либо ответ неверный из-за одной арифметической ошибки
4-5	Ответ неверный, имеется несколько ошибок при верной общей идее решения
2-3	Ответ отсутствует, при этом верно посчитана частная сумма (арифметическая прогрессия)
1-2	Имеются первые шаги в решении

Задание 11.3. (7 баллов)

Доказать, что для всех $x > 0$ справедливо неравенство

$$x^2 + \pi x + \frac{15}{2}\pi\sin x > 0.$$

Решение.

Пусть $f\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 + \pi x$, $g(x) = -\frac{15}{2}\pi\sin x$. Докажем, что $f(x) > g(x)$ для всех $x > 0$.

1. Для $x \in (0;\pi]$ имеем $f(x) > 0$ при этом $g(x) \le 0$, так как $\sin x \ge 0$.
2. Для $x \in (\pi;\frac{7\pi}{6}]$ имеем в силу возрастания функций f и g:

$$f(x) > f(\pi) = 2\pi^2 > 15 > \frac{15\pi}{4},$$

$$g(x) \le g\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{15\pi}{4}.$$

Следовательно неравенство $f(x) > g(x)$ сохраняется.

3. Для $x > \frac{7\pi}{6}$ в силу возрастания функции f имеем

$$f(x) > f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{91\pi^2}{36} > \frac{270\pi}{36} = \frac{15\pi}{2} \ge g(x).$$

Критерии оценивания:

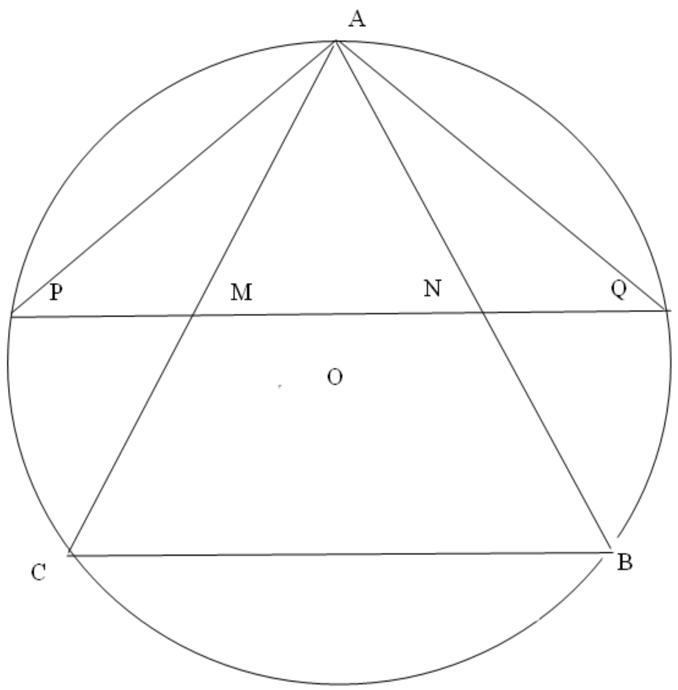
Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное аргументированное доказательство
5-6	Неполная аргументация, имеется небольшая ошибка в подсчете или оценке, не влияющая на общую логику решения
1-4	Рассмотрен один или два из необходимых случаев 1-3. За каждый случай максимум 2 балла
замечание	*Возможно графическое решение, но справедливость неравенства на отрезке $[\pi; \frac{3\pi}{2}]$ не очевидна, без исследования этого момента максимум 4 балла*

Задание 11.4. (7 баллов)

Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность радиуса R. Пусть M и N – соответственно середины сторон AC и AB, а прямая MN пересекает дугу AC в точке P, а дугу AB в точке Q. Найдите $AP^2 + AQ^2$.

Ответ*:* $3R^2$.

Решение.



1. Так как MN средняя линия, то MN параллельно BC. Значит дуги PC и QB равны, отсюда равны дуги и отрезки AP и AQ.
2. $\angle CBA = \angle MNA = 60^0$ как соответственные, отсюда $\angle ANQ = 180^0 - 60^0 = 120^0$, $cos\angle ANQ = cos120^0 = -1/2$.

3. По теореме косинусов в треугольнике ANQ имеем
$$AP^2 + AQ^2 = 2AQ^2 = 2(AN^2 + NQ^2 - 2AN \cdot NQ \cdot cos\angle ANQ) =$$
$$= 2(AN^2 + NQ^2 + AN \cdot NQ). \qquad (1)$$
4. Пусть AN=x, тогда AB=2x, MN=x. По теореме синусов из треугольника ABC имеем
$$\frac{AB}{sin60^0} = \frac{2x}{sin60^0} = 2R.$$
Отсюда
$$x = R \cdot sin60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}R. \qquad (2)$$
5. Из равенства треугольников PMA и QNA следует, что PM=NQ, обозначим PM=NQ=y. Согласно свойству хорд в окружности имеем $AN \cdot NB = PN \cdot NQ$, значит $x^2 = (x + y)y$. Отсюда с учетом (2) получаем уравнение
$$4y^2 + 2\sqrt{3}Ry - 3R^2 = 0.$$
Положительным корнем уравнения является число $y = \frac{\sqrt{3}R(\sqrt{5}-1)}{4}$.
6. Возвращаясь к искомой величине согласно (1) получаем
$$AP^2 + AQ^2 = 2(x^2 + y^2 + xy) == 2\left(\frac{3R^2}{4} + \frac{3R^2(\sqrt{5}-1)^2}{16} + \frac{3R^2(\sqrt{5}-1)}{8}\right) = \frac{24R^2}{8} = 3R^2.$$

Ответ: $3R^2$.

Критерии оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Ответ верный, решение полностью аргументировано
5-6	Ответ верный, решение не до конца обосновано либо ответ неверный из-за одной арифметической ошибки
4-5	Ответ неверный, имеется несколько ошибок в формулах или преобразованиях при верной общей идее решения
3	Ответ неверный или отсутствует, имеются первые шаги в решении,. Например установлена формула (1)
1-2	Имеются несущественные продвижения в решении, найдены некоторые углы или стороны

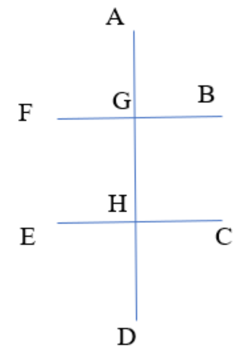
Задание 11.5. (7 баллов)

На листе бумаги изображена квадратная таблица размером 1000 на 1000 квадратных клеток (проведены все внешние и внутренние линии, образующие квадраты размера 1 на 1). На каждом шаге разрешается выбрать произвольную сторону одной единичной клетки и стереть выбранный отрезок вместе со всеми единичными отрезками (сторонами клеток), имеющими общую вершину с выбранной стороной. Достаточно ли 333333 таких шагов, чтобы полностью стереть всю таблицу? Ответ обосновать.

Ответ: не хватит.

Решение.

Переформулируем задачу геометрически. Эквивалентный вопрос состоит в том, можно ли всю сетку таблицы 1000 на 1000 покрыть фигурками, изображенными на рисунке.



Такая фигурка покрывает семь отрезков, если она полностью лежит внутри таблицы. Не сложно доказать, что общее число отрезков в таблице n на n равно S(n)=2n(n+1), то есть S(1000)=2002000. Так как 7 ·333333=2333331>S(1000), то возможность стереть все отрезки имеется. Оптимальной стратегией является минимизация пересечений фигурок. Однако, из-за необходимости накрыть отрезок BC соседняя фигурка накроет также отрезок BG, CH или оба этих отрезка. Аналогично необходимость накрыть отрезок FE приведет к «лишнему» накрытию отрезков FG либо EH. Каждому отрезку фигуры который накрывает отрезок таблицы без перекрытия поставим в соответствие коэффициент 1, а отрезку с перекрытием - 1/2, тогда сумма всех коэффициентов не может быть больше 6. Значит «в среднем» каждая фигурка накрывает не более 6 отрезков. Значит стереть более, чем 6 ·333333=1999998 невозможно.

Ответ: не хватит.

Критерии оценивания:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Ответ верный, решение полностью аргументировано
5-6	Ответ верный, не полная аргументация. Например, строго не доказано, что максимальный коэффициент фигурки равен 6
4-5	Ответ неверный, имеется ошибка в расчетах, например в значении S(1000), при этом имеется общая верная идея решения
1-3	Ответ неверный или отсутствует, имеются первые шаги в решении. Например, имеется идея покрывать таблицу фигурками,

	установлена формула $S(n)$, установлено неравенство $7 \cdot 333333 > S(1000)$
замечание	*предлагается начислять по 1 баллу за каждый из элементов:* 1) только верный ответ (без аргументации); 2) идея покрывать таблицу фигурками; 3) установлена общая формула $S(n)$ либо найдено $S(1000)$; 4) используется неравенство $7 \cdot 333333 > S(1000)$; 5) используется неравенство $6 \cdot 333333 < S(1000)$.