11 класс

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в *комментариях* к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

11.1. Пусть a и b - положительные числа и $p = 1 + a/b$, $q = 1 + b/a$, $p^2 + q^2 = 15$.
Найдите значение выражения $p^4 + q^4$. Ответ: 175

Решение. $(p - 1)(q - 1) = 1 \rightarrow pq = p + q = r$; $p^2 + q^2 = (p + q)^2 – 2pq = r^2 – 2r = 15 \rightarrow r = 5 \rightarrow$
$p^4 + q^4 = (p^2 + q^2)^2 – 2(pq)^2 = 15^2 – 2r^2 = 225 – 50 = 175$.

Замечание. Возможны различные способы составления уравнений для нахождения p или q .

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Составлено уравнение для нахождения p или q – 1 балл. Только верный ответ с верным примером ($a = (3+\sqrt{5})/2$, $b = (3-\sqrt{5})/2$ или наоборот) – 1 балл. Найдено решение уравнения без дальнейшего продвижения – 3 балла.

11.2. Олег сыграл за две недели не более сорока партий в шахматы. Три четвёртых из партий, сыгранных Олегом за первую неделю, он выиграл. А из партий, сыгранных во вторую неделю, Олег не выиграл только 20% партий. Найдите общее количество сыгранных Олегом за две недели партий, если во вторую неделю он выиграл на семь партий больше, чем в первую. Ответ: 32

1-е решение. Обозначим за n количество партий, не выигранных Олегом во вторую неделю. Тогда во вторую неделю всего было сыграно $5n$ партий, а в первую неделю было выиграно $(4n – 7) \geq 1$ партий и всего в первую неделю было сыграно $4(4n – 7)/3$ партий. Общее количество сыгранных партий равно $(31n – 28)/3$ и должно быть целым числом, не превосходящим сорока. При $n = 2$ и $n = 3$ число $(31n – 28)/3$ не является целым, при $n = 4$ получаем $(31n – 28)/3 = 32 \leq 40$, а при $n \geq 5$ получаем $(31n – 28)/3 > 40$.

2-е решение. Пусть x и y - количества партий в первую и вторую недели соответственно. Из условия задания следует, что $x = 4k$, $y = 5s$, где k и s – натуральные числа. Тогда $4k + 5s \leq 40$. В первую неделю Олег выиграл $3k$ партий, а во вторую неделю – $4s$ партий. Значит, $3k + 7 = 4s$. Так как справа чётное число, то k – нечетно. Складывая это уравнение с неравенством, получим $7k + s \leq 33$. Подставляя значения $k = 1$ и $k = 3$, получим соответственно уравнения $10 = 4s$ и $16 = 4s$, первое из которых не имеет решений в натуральных числах . Тогда $s = 4$ и $k = 3$. Таким образом, Олег в первую неделю сыграл 12 партий, а во вторую – 20 партий. Всего 32 партии.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Доказано, что количество партий, не выигранных в первую неделю, нечётно. – 1 балл.

11.3. Найдите наибольшее положительное целое число n , произведение всех делителей которого равно n^2, а сумма всех делителей равна $n + 2017$. Ответ: $997 \cdot 1019 = 1\,015\,943$.

Решение. Произведение всех делителей натурального числа n равно самому числу в степени, равной половине количества всех делителей числа. Поэтому число n имеет ровно четыре делителя и, следовательно, представимо в виде $n = p^3$ или в виде произведения двух различных простых сомножителей: $n = p\cdot q$. Уравнение $1 + p + p^2 + p^3 = p^3 + 2017$ не имеет решений в простых числах. А из равенства $1 + p + q + pq = n + 2017$ получаем, что $p + q = 2016$.

Пусть $p = 1008 – t$, $q = 1008 + t$. Тогда $n = p\cdot q = 1008^2 – t^2$. Так как p и q – простые числа, то t – нечетное число и $n \le 1008^2 – 1$. Если $t = 1$, то $1008 – 1 = 53\cdot 19$ - непростое число. Подставляя $t = 3, 5, 7, 9$, получаем в качестве p числа 1005, $1003 = 59\cdot 17$, $1001 = 91\cdot 11$, 999, которые не являются простыми. Для $t = 11$ числа $p = 997$ и $q = 1019$ – простые).

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Доказано, что n представимо в виде произведения двух различных простых сомножителей: $n = p\cdot q$ или $n = p^3$ – 3 балла. Только $n = pq$ – 2 балла. Доведён до конца случай $n = pq$ без рассмотрения $n = p^3$ – 5 баллов.

11.4. В клетках квадрата 4х4 расставляются целые положительные числа так, что в каждой клетке ровно одно число, все шестнадцать чисел различны и в любых двух соседних по горизонтали или вертикали клетках (имеющих общую сторону) стоят не взаимно простые числа (имеющие общий делитель, отличный от 1). Найдите наименьшее возможное значение суммы всех шестнадцати чисел.

Ответ: 170

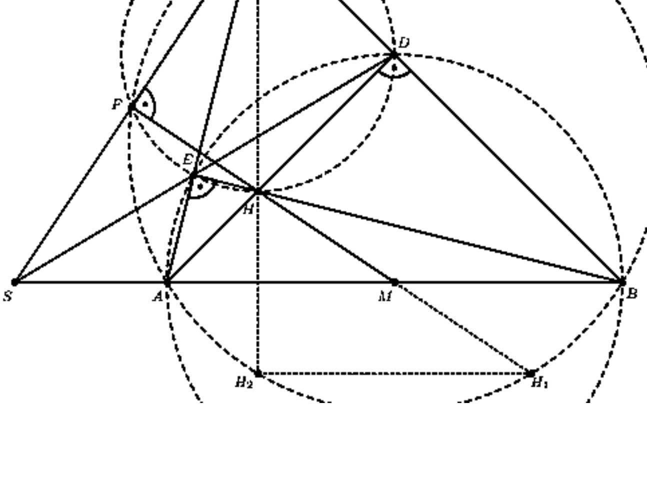
Решение. Оценки: заметим, что число 1 не может быть одним из шестнадцати подходящих чисел, и что если среди шестнадцати чисел есть простое число p, то есть и ещё минимум два числа кратных p. Поэтому в случае, когда в наборе нет чисел, кратных какому-то простому числу $p \ge 11$, имеем оценку:
$S \ge 2+3+4 +5+6+7+8+9+10+12 +14+15+16 +18+20+21 = 170$. А в случае, когда в наборе есть число, кратное какому-то простому числу $p \ge 11$, имеем оценку:
$S \ge 2+3+4+5+6+7+8+9+10+12 +13+14+15 +(11+22+33) = 108+66 = 174$. Пример с $S = 170$:

7	14	16	8
21	18	2	4
3	12	20	10
9	6	15	5

Комментарий. Только верный ответ – 0 баллов. Приведён верный пример с $S = 170$ – 3 балла. Для всех случаев обоснованно получены оценки $S \ge 170$ – 4 балла. Только в одном из указанных в решении двух случаев обоснованно получена оценка $S \ge 170$ или более точная – 1 балл.

11.5. В остроугольном неравнобедренном треу-гольнике ABC точка M – середина стороны AB, высоты AD и BE пересекаются в точке H. Докажите, что прямые BA, DE и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно прямой MH, пересекаются в одной точке.

Решение. CH – диаметр окружности ω, описан-ной около треугольника CDE. Пусть AC меньше CB и окружность ω пересекается с описанной около треугольника ABC окружностью Γ в точках C и F. Тогда $\angle CFH = 90°$. Докажем, что точка M находится на прямой FH. Точки H_2 и H_1, симметричные точке H относительно прямой AB и точки M соответственно, находятся на Γ и $MH = MH_2 = MH_1$. Значит, $\angle CH_2H_1 = 90°$, CH_1 – диаметр окружности Γ, $\angle CFH_1 = 90°$ и точки F, H, M, H_1 находятся на одной прямой. Точки A, B, D, E находятся на окружности γ с диаметром AB. Пусть прямые AB и ED пере-секаются в точке S. Тогда для окружности γ верно $SE\cdot SD = SA\cdot SB$ (следствие подобия треугольников (SAE и SDB). Проведем из точки S прямую SC, пересекающую окружность ω в точке K. Для окружности ω верно $SK\cdot SC = SE\cdot SD$, а для окружности Γ верно $SK\cdot SC = SA\cdot SB$. Это значит, что окружности Γ и ω пересекаются в точке K. Тогда $K = F$ и, следовательно, прямая CF проходит



через точку S.

Замечание. Участники олимпиады могут использовать в качестве доказательства известное утверждение, что для попарно пересекающихся окружностей прямые, проходящие через три пары точек пересечения окружностей (радикальные оси) пересекаются в одной точке (радикальном центре).